Sia G un gp, F un Campo

$$F[G] = \left\{ \sum_{\forall g \in G}^{<\infty} a_g g \;\middle|\; a_g \in F \right\}$$

Sia V uno spaz. vett. $/F$

$$* : \begin{array}{l} G \times V \xrightarrow{*} V \\ (g, v) \longmapsto g * v \end{array} \Big\} \text{ azione di } G \text{ su } V \text{ lin.}$$

Si def: ⊛ $$\left.\begin{array}{l} F[G] \times V \longrightarrow V \\ \left(\sum_{g \in G}^{<\infty} a_g g, v\right) \longmapsto \sum a_g \, g * v \end{array}\right\}$$

⊛ soddisfa le condizione di V modulo a coeff. in $F[G]$.

$\Rightarrow V$ è un $F[G]$-mod. (Sinistro).

$\{$azioni lin. di G su V a coeff. in $F\}$

$\xrightarrow{\sigma} \{ F[G]$ - moduli $V \}$

$* \longmapsto \circledast$

Sia M un $F[G]$-mod. $F \cong F1_G \subset F[G]$

$F[G] \supseteq F$ a meno isom.

$\Rightarrow$ M è uno spaz. / F.

def. $* : G \times M \longrightarrow M$

$(g, v) \longmapsto g \cdot v \quad g \in G \subseteq F[G]$

$\Rightarrow$ $*$ è un'azione di G su M linear.

$\{F[G]$ - moduli $V\} \xrightarrow{\tau} \{$azioni di G su V lin$\}$.

$\sigma \circ \tau = id$, $\tau\sigma = id$.

prop: $\exists$ corrisp. 1-1:

$\{$azioni lin. di G su $V\} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \{F[G]$ - moduli $V\}$

Ossia:

$$\begin{tikzcd}
\{\text{azioni di } G \text{ su } F\text{-spazi}\} \arrow[rr, leftrightarrow, "1-1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "1-1"'] & & \{F[G]\text{-moduli}\} \arrow[dl, leftrightarrow, "1-1"] \\
& \{\text{rapp. di } G \text{ sugli spazi a coeff. in } F\}. &
\end{tikzcd}$$

Prop: ① Sia $\rho : G \to GL(V)$ una rapp.

se $U \underset{\text{sottosp.}}{\subseteq} V$ e $\rho(G)U \subseteq U$

i.e. $\rho|_U$ sottorapp. di $G \rightsquigarrow \underset{F[G]\text{-sottomodulo}}{U \subseteq V}$

i.e. $\{\text{sottorapp. di una rapp. } \rho : G \to GL(V)\}$

$\xleftrightarrow{1-1} \{\text{sottomoduli di } V, \text{ come } F[G]\text{-mod}\}$.

② $\{\text{rapp. irr. di } G \text{ su spaz. a coeff in } F\}$

$\xleftrightarrow{1-1} \{F[G]\text{-moduli semplici}\}$.

(3) Siano $\rho_1, \dots, \rho_n$ rapp. di G su spaz. a coef. in F.

$$\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n : G \to GL(V_1 \oplus \dots \oplus V_n).$$

$\rho_i : G \to GL(V_i)$, $i = 1, \dots n$.

$\Rightarrow$ $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ è una $F[G]$ - modulo.

una somma diretta dei

(4) $\rho : G \to GL(V)$ una rapp. Completamente riducibile.

$\Rightarrow$ V è un $F[G]$ - modulo semisemplice.

$\{$rapp. Complet. riducibili di G sugli spaz. a coeff. in $F\}$

$\xleftrightarrow{1-1}$ $\{F[G]$ - moduli semisemplici $\}$ (Aritiniano).

(5) {Classi equivalenti delle rapp. di G a coeff. in F}

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ {Classi isomorfi dei $F[G]$-mod.}

e.g.: $G = \langle g \rangle$ gp ciclico

$\rho : G \to GL(V)$ una rapp. irr., V/F.

$\Rightarrow$ V è un $F[G]$-modulo semplice

$V = F[G] \cdot v$, $v \in V \setminus \{0\}$

$V \cong F[G] / \mathrm{Ann}_{F[G]} v$, $\qquad \mathrm{Ann}_{F[G]} v = \mathrm{Ann}_{F[G]} V \trianglelefteq F[G]$

V semplice $\Rightarrow$ $\mathrm{Ann}_{F[G]} \triangleleft_{\text{mass}} F[G]$.

Se $|G| = \infty$, $F[G] = F[x, x^{-1}]$

{ideali mass. di $F[x]$ tranne (x)} $\longleftrightarrow$ {ideali mass. di $F[x, x^{-1}]$}.

Se $|G| = m$, $\Rightarrow$ eser

<u>eser</u>: Dimostrare che per $G = \langle g \rangle$, con $|G| = \infty$,

Se $F = \mathbb{C}$ V irr $\Rightarrow$ $V \cong \mathbb{C}$

se $F = \mathbb{R}$ $V \cong \begin{cases} \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{R}} V = 1 \\ \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} V = 2, \end{cases}$

se $F = \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ rapp. irr. di grado n. i.e. $\dim_{\mathbb{Q}} V = n$.

---

*: Un modulo V è s.s. $\Longleftrightarrow$ ogni sottomod. di V è un addendo.

<u>Prop</u>: Una rapp. $\rho : G \to GL(V)$ è completamente riducibile $\Longleftrightarrow$ ogni sottorapp. di ρ è un addendo.

Teo (Maschke) Sia G un gp finito, Sia F un campo con $\mathrm{char}\, F = 0$ opp. $\mathrm{char}\, F \nmid |G|$, allora ogni rapp. $\rho : G \to GL(V)$ è completamente riducibile dove $\dim_F V < \infty$.

Dim. Sia $U \underset{\text{Sottosp.}}{\subseteq} V$ t.c. $\rho|_U$ è una sottorapp. di ρ, i.e. U è un $F[G]$-sottomod. di V.

Tesi: U è un addendo come modulo:

$V = U \oplus W$, W è un sottosp. di V.

$$\left.\begin{array}{l} p : \underset{U \oplus W}{V} \longrightarrow V \\ (u, w) \longmapsto u, \ \forall u \in U, \forall w \in W \end{array}\right\} \text{proiez. su } U$$

$p(V) \subseteq U$.

def: $\rho' : V \to V$

$$\forall v \in V, \quad v \longmapsto \rho'(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{\forall g \in G} g \cdot \rho(g^{-1} v)$$

① $\rho'(V) \subseteq U$

② ρ' è un omomorf. di $F[G]$-modulo.

perché:

$\forall h \in G, \ \forall v \in V,$

$$\rho'(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\, \rho(g^{-1} h v)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \underbrace{h^{-1} g}\, \rho(\underbrace{g^{-1} h} v)$$

$$= \frac{h}{|G|} \sum_{g' \in G} g'\, \rho(g'^{-1} v), \quad g' = h^{-1} g$$

$$= h \cdot \rho'(v)$$

$$\Rightarrow \rho'(x \cdot v) = x \cdot \rho'(v), \ \forall x \in F[G].$$

③ $\forall u \in U$, $\rho'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\, \rho(g^{-1} u) = \frac{1}{|G|} \sum g \cdot g^{-1} u$
$= u.$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] & V \arrow[r, "\pi"] \arrow[l, dashed, bend left, "p'"] & V/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sequenza corta esatta di $F[G]$-mod.

$p' \circ \iota = id_U \Rightarrow V \cong U \oplus V/U$

$\Rightarrow$ U è un addendo come sottomodulo.

$\Rightarrow$ V è semisemplice.

i.e. ρ è compl. riducibile

<u>Cor</u>: Se $\mathrm{Char}\, F \mid |G|$, allora esiste una rapp. di G a coeff. in F che non è completamente riducibile.

<u>Dim</u>: <u>Tesi</u>: $\exists$ un $F[G]$-mod non semisemplice

$$z = \sum_{\forall g \in G} g \in F[G]$$

$$\forall h \in G, \quad h \cdot z = \sum_{\forall g \in G} hg = \sum_{\forall g' \in G} g' = z.$$

$g' = hg$

$$z^2 = \left(\sum_{h \in G} h\right) z = |G| z \underset{\operatorname{char} F \,|\, |G|}{=} 0z = 0$$

Sia S un $F[G]$-mod semplice non banale

$$zS \underset{\text{sottomod}}{\subseteq} S \Rightarrow zS = \begin{cases} \{0\} \\ S \Rightarrow z^2 S = S \\ \qquad\qquad \overset{\|}{0S} \text{ assurdo} \end{cases}$$

$zS = \{0\}$

$$\Rightarrow z \in \bigcap_{\substack{\forall S \\ \text{semplice} \\ F[G]\text{-mod}}} \operatorname{Ann}_{F[G]} S = J(F[G]).$$

$\Rightarrow$ $F[G]$ Non è anello Semisemplice

$\Rightarrow$ Come $F[G]$-mod, $F[G]$ Non è S.S.

<u>Cor</u>: $|G| < \infty$, F campo.

allora $F[G]$ è un anello semisemplice $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Char} F = 0$ opp. $\operatorname{Char} F \nmid |G|$.

[W] .