* Lemma di Schur:

Sia A un F-algebra dove F un campo algebric. chiuso; sia S un A-modulo semplice, allora

$$\mathrm{End}_A S \cong F$$

*: Una F-algebra A è

1) A è un anello:

2) $F \subseteq C(A)$ a meno isom.

Sia G un gruppo, F campo alg. chiuso. Sia $\rho: G \to GL(V)$ una rapp $\overset{irr.}{\wedge}$ dove V è uno F-spaz. $\dim_F V < \infty$. Per $\sigma \in \mathrm{End}_F V$ se $\forall g \in G$, $\sigma \rho(g) = \rho(g) \sigma$, allora

$$\sigma = \lambda \cdot id_V, \text{ per. q.c. } \lambda \in F.$$

Dim. $A = F[G]$, $S = V$.

*: $|G| < \infty$, $\operatorname{char} F = \begin{cases} 0 \\ \nmid |G| \end{cases}$ $\Rightarrow F[G]$ è semisemplice.

*: Sia A un anello semisemplice. $\Rightarrow$ ogni A-mod è semisemplice.

Prop. Sia A un anello semisemplice,

$A = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$ dove S_i, $\forall i$ sono A-~~sotto~~mod. semplice, Allora ogni A-mod. semplice è isomorf. ad uno dei S_i.

Dim: Sia S un A-mod. semplice

$\Rightarrow S = As, \ s \in S.$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi : A \to S \\ \forall a \in A, \quad a \mapsto a \cdot s\end{array}\right\}$$ morf. di A-modulo suriett.

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(S_i) = S$$

$$\exists\, i \in \{1, \dots, n\},\ \varphi(S_i) \neq \{0\}$$

$$\varphi(S_i) \underset{\text{sottomod}}{\subseteq} S \Rightarrow \varphi(S_i) = S$$

$$\Rightarrow \varphi\big|_{S_i} : S_i \to S \text{ è isomorf.}$$ ///

G gp. con $|G| < \infty$, F campo

$\operatorname{char} F \begin{cases} = 0 \\ \nmid |G| \end{cases}$

$$F[G] \cong \underbrace{S_1 \oplus \cdots \oplus S_1}_{n_1} \oplus \underbrace{S_2 \oplus \cdots \oplus S_2}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{S_r \oplus \cdots \oplus S_r}_{n_r}$$

dove S_i sono $F[G]$-sottomod. semplice

$$\cong M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r).$$

dove D_i corpi, $D_i \cong \mathrm{End}_{F[G]} S_i$.
$\forall i = 1, \ldots, r$.

Prop: $\#\{F[G]\text{-mod. semplici}\} = r$.

i.e. ogni $F[G]$-mod. semplice è isomorf. a qualche S_i.

Ossia: $\#\{$rapp. di G a coeff. in F irr. non-equivalenti$\}$

$= r$.

Osser.:

1) Sia D un corpo,
$$D^n = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \,\middle|\, d_i \in D,\ 1 \le i \le n \right\}$$
è un $M_n(D)$-mod. sinistro semplice.

2) per $1 \le i \le n$,

$$D^{(i)} := \left\{ \begin{array}{c} \\ \left(\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & & 0 & d_n & 0 & & 0 \end{matrix} \right) \\ i\text{-colonna} \end{array} \in M_n(D) \,\middle|\, \forall d_i \in D \right\}$$

$\Rightarrow D^{(i)}$ è un $M_n(D)$-modulo sinistro

$D^{(i)} \cong D^n \quad \forall i$

isom. di $M_n(D)$-mod.

$$M_n(D) = \bigoplus_{i=1}^{n} D^{(i)} \cong \underbrace{D^n \oplus D^n \oplus \cdots \oplus D^n}_{n}$$

$\Rightarrow$ ogni $M_n(D)$-mod semplice è isom. a D^n.

3) Per un anello semisemplice

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} D_i^{(j)} \right)$$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^{r} (\underbrace{D_i^{n_i} \oplus D_i^{n_i} \oplus \cdots \oplus D_i^{n_i}}_{n_i})$$

è una somma diretta dei A-sottomod. semplice.

$\Rightarrow$ ogni A-mod semplice è isomorf. a uno dei $D_i^{n_i}$.

osserv: a meno isomorf., A-mod semplici sono:

$$D_1^{n_1}, D_2^{n_2}, \dots, D_r^{n_r}.$$

4). $A \cong \underbrace{S_1 \oplus \cdots \oplus S_1}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{S_r \oplus \cdots \oplus S_r}_{n_r}$.

dove $S_1, \dots, S_r$ sono A-sottomod. semplici.

$\Rightarrow S_i \cong D_i^{n_i}$ isom. di A-mod.

Eser.

$A = F[G]$, $\dim_F S_i = \underbrace{\dim_F D_i} \cdot n_i$

5): $|G|<\infty$, F campo alg. chiuso

$\mathrm{Char} F \begin{cases} =0 \\ \nmid |G| \end{cases}$:

Per $1 \leq i \leq r$, $D_i \cong \mathrm{End}_{F[G]} S_i \underset{\text{schur}}{\cong} F$.

$$\Rightarrow F[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$$

$\dim_F D_i = 1$.

$\dim_F S_i = n_i$, $i=1,\dots,r$.

Prop. $|G|<\infty$, $\mathrm{Char} F \begin{cases} =0 \\ \nmid |G| \end{cases}$, F campo alg. chiuso. Allora:

1): $F[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$

2). il num. delle rapp. irr. di G a coeff. in F è r.

A meno equivalenza: rapp. irr. di G a coeff. in F sono:

$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$,

dove $\dim_F V_i = n_i$, $\quad i = 1, \ldots, r$.

3): $|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$.

Dim: 1) e 2) Da osser. $\boxed{1) \to 5)}$.

3): $|G| = \dim_F F[G] = \dim_F \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$

$$= \sum_{i=1}^{n} n_i^2$$ ///.

e.g. $G = S_3$, determinare tutte le rapp. di G a coeff. in $\mathbb{C}$.

① $\mathbb{C}[S_3]$ è semi-semplice

$\Rightarrow$ Tutte le rapp. di S_3 su $\mathbb{C}$ sono complet. riducibile.

② rapp. irr. di S_3 a coeff. in $\mathbb{C}$?

$$6 = |G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2 \quad , \quad n_i = \text{dim. delle rapp. irr.}$$

$$6 = \begin{cases} 1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \; n_i = 1, \; \forall i, \; r = 6 \\ ② \; n_1 = n_2 = 1, \; n_3 = 2, \; r = 3 \end{cases}$$

① $r = 6 \Rightarrow \mathbb{C}[S_3] = \bigoplus_{i=1}^{6} M_1(\mathbb{C})$

$$= \bigoplus^{6} \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \mathbb{C}[S_3]$ anello Comm.

$\Rightarrow S_3$ Comm. $\Rightarrow$ assurd

$\Rightarrow$ ① ✗

$\Rightarrow$ ② S_3 ha due rapp. irr. di 1-dim.

a meno equival. $\Big\{$ e 1 rapp. irr. di dim. 2.