* Sia G un gp, $\forall g \in G$.
Classe coniugata di g è

$$C_g = \{ hgh^{-1} \mid \forall h \in G \}$$

Lemma. Sia G un gp finito,
F un Campo.

$$G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \,,$$ dove

C_i classi coniugati, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ $\forall i \neq j$
$r \in \mathbb{N}$.

Per $1 \leq i \leq r$, $c_i = \sum_{\forall h \in C_i} h \in F[G]$

Sia $C(F[G])$ = Centro di $F[G]$, che è uno spaz. vett. $/ F$

Allora $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ è una base di $C(F[G])$ e $\dim_F C(F[G]) = r$.

<u>Dim</u>. $\forall\, 1 \leq i \leq r$,

① $c_i \in C(F[G])$:

$$\forall g \in G, \quad g c_i g^{-1} = g \sum_{\forall h \in C_i} h \, g^{-1}$$

$$= \sum_{\forall h \in C_i} g h g^{-1}$$

$g' := g h g^{-1}$

$$= \sum_{\forall g' \in C_i} g' = c_i$$

$$\forall x \in F[G], \quad x = \sum_{\forall g \in G} a_g g, \quad a_g \in F$$

$$c_i x = \sum_{g \in G} a_g c_i g = \sum_{\forall g} a_g g c_i = x \cdot c_i$$

$\Rightarrow \; c_i \in C(F[G])$.

② $\{c_1, \dots, c_r\}$ sono generatori di $C(F[G])$:

Sia $c = \sum_{\forall g \in G} a_g g \in C(F[G])$

$$\forall h \in G, \quad c = h c h^{-1} = h \sum_{\forall g} a_g g \, h^{-1}$$

$$= \sum_{\forall g \in G} a_g h g h^{-1}$$

$g' = hgh^{-1}$ $\Updownarrow$ $g = h^{-1}g'h$

$$= \sum_{\forall g' \in G} a_{h^{-1}g'h}\, g'$$

$$= \sum_{\forall g \in G} a_{h^{-1}gh}\, g$$

$$c = \sum_{\forall g \in G} a_g\, g \quad : \quad \{g \mid \forall g \in G\} \text{ base di } F[G]$$

$$\Rightarrow \quad a_g = a_{h^{-1}gh}, \quad \forall h \in G.$$

i.e. gli elem. coniugati di G hanno la stessa Coeff. per c.

$$\Rightarrow \quad c = \sum_{i=1}^{r} a_{g_i} \Big(\sum_{\forall h \in C_i} h \Big) = \sum_{i=1}^{r} a_{g_i} c_i$$

dove $g_i \in C_i$

$$\Rightarrow \quad C(F[G]) = Fc_1 \oplus Fc_2 \oplus \cdots \oplus Fc_r$$

<u>eser</u>: $\{c_1, \ldots, c_r\}$ lin. indipendenti

di Conseguenza: $\Rightarrow$ "$\oplus$"

$\Rightarrow$ 3: $\{c_1, \ldots, c_r\}$ è una base. ✓ $\boxed{12}$

Teo. $|G| < \infty$, F campo alg. chiuso

$\operatorname{char} F \begin{cases} = 0 \\ \nmid |G| \end{cases}$. Allora.

① il num. dell rapp. irr. non-equivalenti di G a coeff. in F

$=$ ② il numero di classi coniugati di G

$=$ ③ il num. dei $F[G]$-mod. semplice non-isomorfi.

Dim: $$F[G] = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F), \quad r = \#③$$

$$C(F[G]) = \bigoplus_{i=1}^{r} C(M_{n_i}(F))$$

$$C(M_{n_i}(F)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \in M_{n_i}(F) \,\middle|\, \forall a \in F \right\}$$

$$\dim_F C(F[G]) = \sum_{i=1}^{r} \dim_F C(M_{n_i}(F))$$

$$= r \overset{\text{Lemma}}{=} \#② \Rightarrow \#① = \#② = \#③ \quad \boxed{///}.$$

e.g. $G = S_3$

$\#\{$rapp. irr. di S_3 coeff. in $\mathbb{C}$ non-equivalenti $\}$

$= \#\{$class coniugati in $S_3\}$.

Classi coniugati di S_3:

$\left.\begin{matrix} \{id_{S_3}\}, \{(12),(13),(23)\} \\ \{(123),(132)\} \end{matrix}\right\} \# = 3.$

$\Rightarrow S_3$ ha $\# 3$ rapp. irr. non-equival. a coeff. in $\mathbb{C}$. $\begin{pmatrix} \# 2 \text{ di dim } 1 \\ \# 1 \text{ di dim } 2 \end{pmatrix}$

$\rho_1 : S_3 \longrightarrow GL(V)$ rapp. banale

$\forall \sigma \in S_3,\ \sigma \longmapsto id_V \qquad \dim_{\mathbb{C}} V = 1$

$\rho_2 : \sigma \longmapsto \text{sgn}.\sigma \cdot id_V$

Sia $\rho : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^3)$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{C}^3$

$$\forall \sigma \in S_3, \quad \sigma \longmapsto \rho(\sigma) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$

$$\left.\sum_{i=1}^{3} a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^{3} a_i v_{\sigma(i)}\right\} \text{rapp.}$$

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i v_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} a_i = 0 \right\} \subsetneq \mathbb{C}^3 \text{ sottospaz.}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} V = 2.$$

verificate: $\rho\big|_V$ è irr. di dim. 2.

* ogni $\sigma \in S_n$ è un prod. dei cicli disgiunti

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{r_1})(j_1 \cdots j_{r_2}) \cdots (k_1 \cdots k_{r_t}) \\ i_l, j_s, r_k \in \{1, \ldots, n\} \\ r_1 \geq r_2 \geq \ldots r_t, \quad n = \underbrace{r_1 + r_2 + \cdots + r_t}_{\text{partiz. di } n} \end{array}\right.$$

Struttura di σ

* $\sigma, \tau \in S_n$, σ e τ sono coniugati

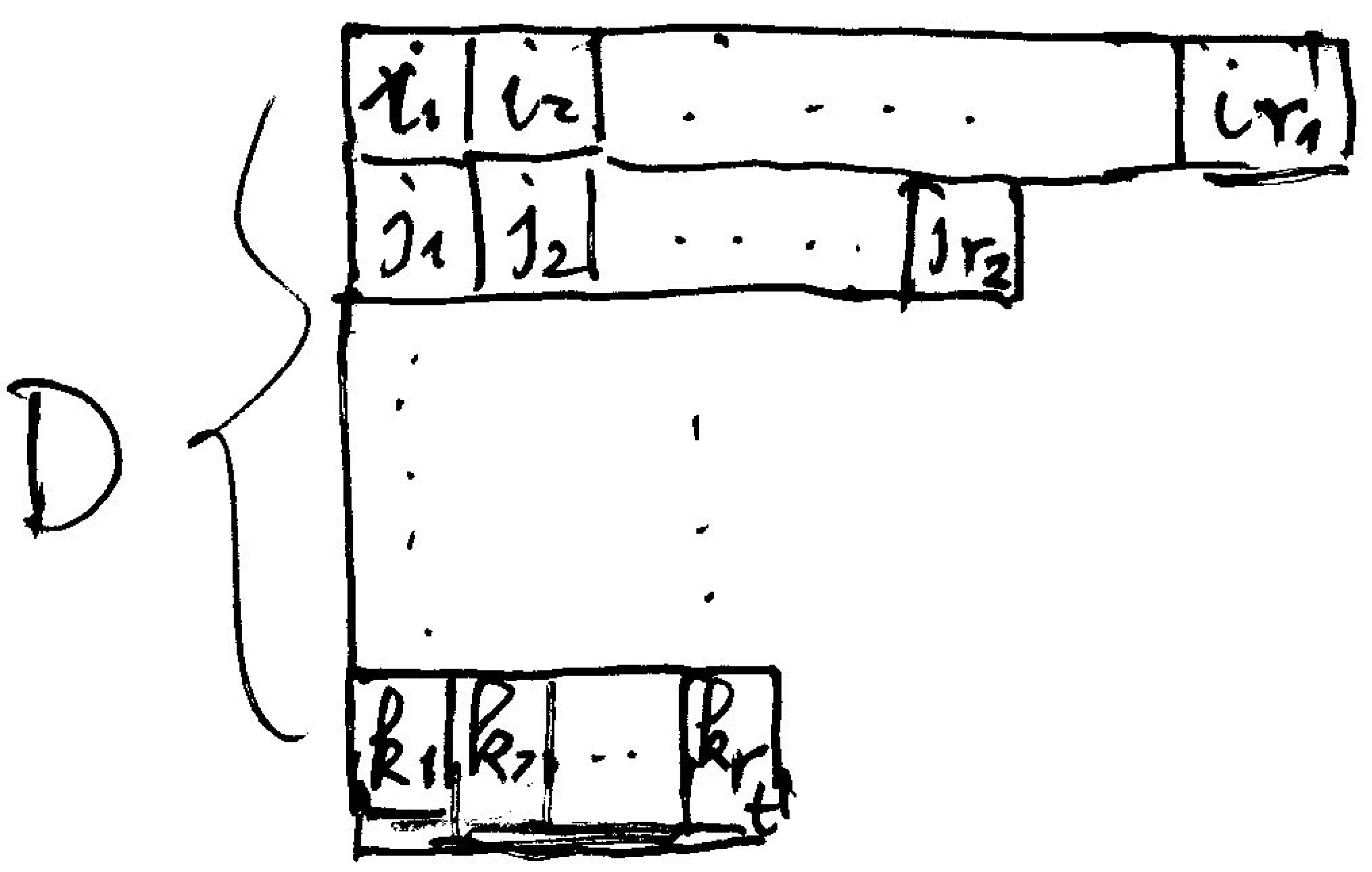
$\Longleftrightarrow$ hanno la stessa struttura

* $\#\{$class. coniugati di $S_n\}$

$= \#\{$partiz. di $n\}$,

$= \#\{$rapp. irr. non-equiv. di $S_n\}$
a coeff. in $\mathbb{C}$

Def: $\sigma = (i_1 \cdots i_{r_1})(j_1 \cdots j_{r_2}) \cdots (k_1 \cdots k_{r_t})$.



r_1 quadretti
r_2 - - - - -
⋮
r_t - - - - -

Si chiama diagramma di Young

se $\sigma, \tau \in S_n$,

$\left.\begin{array}{l} D \text{ diag. ass. a } \sigma \\ D' \text{ - - - - - - } \tau \end{array}\right\} \Rightarrow$ D e D' sono equiv. se σ e τ sono coniugati e.g. $\sigma = (123)(56)(4) \in S_6$

$$D: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Dato un diagram. di Young D.

$$S_n \supseteq R(D) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ stabilizza ogni riga di } D\}$$

$$S_n \supseteq C(D) = \{ \ldots \mid \ldots\ldots \text{ colonne di } D\}$$

$$S_D := \sum_{\forall \sigma \in R(D)} \sigma \in \mathbb{C}[S_n].$$

$$T_D := \sum_{\forall \tau \in C(D)} \tau \in \mathbb{C}[S_n].$$

Prop: 1): $(T_D S_D)^2 = \lambda T_D S_D$, per q.c. $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

$$e_D := \frac{1}{\lambda} T_D S_D \in \mathbb{C}[S_n]$$

$e_D^2 = e_D$ e e_D è primitivo

2). Se D e D' due diagramm. non sono equivalenti

$$e_D \cdot e_{D'} = 0$$

3) $\{D_1, \ldots, D_\ell\}$ ins. di diagram. di Young non-equivalenti.

$$\ell = \#\{\text{class. coniugati di } S_n\} = \#\{\mathbb{C}[S_n]\text{-mod. semplici non-isomorf.}\}$$

$\mathbb{C}[S_n]e_{D_i}$ indecomponibile + semisempl

$\Rightarrow \mathbb{C}[S_n]e_{D_i}$ è semplice mod. $\forall i = 1 \ldots \ell$.

$\forall i \neq j$ $\mathbb{C}[S_n]e_{D_i} \cong \mathbb{C}[S_n]e_{D_j}$

Di Conseguenza:

I $\mathbb{C}[S_n]$-~~sotto~~mod sempl. sono $\{\mathbb{C}[S_n]e_{D_i} \mid i = 1, \ldots, \ell\}$ non isomorf.