Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 11 – a.a. 2023-24

Da consegnare lunedì 8 gennaio

Esercizio 1. Determinare la forma canonica della conica proiettiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione $x_0^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$.

Esercizio 2. Determinare i punti impropri e le chiusure proiettive delle seguenti curve in $\mathbb{C}^2$:

$$x + 2y^2 - 1 = 0, \quad 3y + xy + xy^2 = 0, \quad x^2y^2 - 1 = 0.$$

Esercizio 3. Consideriamo il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2)$. Siano $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una retta proiettiva, e $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la conica di equazione $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.

1. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \smallsetminus L$ è connesso?
2. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \smallsetminus C$ è connesso?

Giustificare le risposte.

Esercizio 4. *(es. 5 dallo scritto di febbraio 2019)* Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, contenente almeno una conica non degenere. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta:

A: $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere.
B: $\mathcal{F}$ può contenere 4 coniche degeneri.
C: $\mathcal{F}$ può contenere infinite coniche degeneri.

Esercizio 5. Si scriva l'equazione della conica del piano proiettivo reale passante per i punti:

$$(1:0:1),\ (-1:0:0),\ (0:1:1),\ (0:-1:0),\ (1:3:2).$$

Esercizio 6. *(es. 5 dallo scritto di gennaio 2019)* Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo i punti $P_1 = [0:1:0]$ e $P_2 = [0:0:1]$ e le rette $r_1 : x_0 - x_2 = 0$ e $r_2 : 2x_0 - x_1 = 0$. Si mostri che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{\text{coniche } C \text{ tangenti a } r_i \text{ in } P_i, i = 1, 2\}$$

è un fascio, e determinarne i punti base e le coniche degeneri.

Esercizio 7. Consideriamo 5 punti nel piano proiettivo, a 4 a 4 non allineati, e sia C l'unica conica che li contiene. Mostrare che C è non degenere se e solo se i 5 punti sono in posizione generale.

Esercizio 8. Sia C una curva di grado 3 nel piano proiettivo. Mostrare che se C ha (almeno) due punti singolari, allora C contiene una retta.