Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 12 - 11 e 12 gennaio 2024
Con il programma svolto prima di Natale, si possono risolvere i primi tre esercizi.

Esercizio 1. Consideriamo il seguente fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$(\lambda - \mu)x^2 - \lambda y^2 + 4(\mu - \lambda)xz + (4\lambda - \mu)yz = 0.$$

1. Determinare i punti base e le coniche degeneri del fascio.
2. Determinare le coniche del fascio tangenti a $x = 0$.

Esercizio 2. Date le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{C} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad \mathcal{D} : x_1 x_2 = 0,$$

determinare

1. la conica del fascio generato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ passante per il punto $[1 : 1 : 1]$;
2. i punti base del fascio.

Esercizio 3. Date le cubiche (curve di ordine 3) di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione:

$$\mathcal{C}_1 : \ x^3 + 2xy - 5x + 1 = 0, \quad \mathcal{C}_2 : \ 2x^2y + xy^2 + x + 3 = 0,$$

determinarne

1. la chiusura proiettiva,
2. i punti impropri,
3. i punti singolari,
4. la retta tangente a $\mathcal{C}_1$ nel punto $P_1 = (1, 3/2)$ e a $\mathcal{C}_2$ nel punto $P_2 = (-1, 1 + \sqrt{3})$.

Esercizio 4. Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

trovarne la forma di Jordan e una base rispetto alla quale la matrice ha tale forma.

Esercizio 5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che il suo polinomio caratteristico è $c(t) = (1-t)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan e una base rispetto alla quale A ha tale forma J.

Esercizio 6. Sia A una matrice complessa con polinomio caratteristico $c(t) = (t-3)^2(t-4)^3$. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan e per ciascuna di esse indicare il corrispondente polinomio minimo.

Esercizio 7. Trovare la forma di Jordan della seguente matrice a coefficienti complessi al variare del parametro $h \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} h & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & h-2 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la forma di Jordan J di A e una base rispetto alla quale A si scrive in tale forma.

Esercizio 9. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.
2. Se si, trovare una base comune che le diagonalizza entrambe.

Esercizio 10. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $c_A(t) = (t-2)^2(t+2)^2$ e $c_B(t) = t(t+1)^3$ rispettivamente. Le matrici commutano (non si deve verificare l'affermazione). Dire se sono simultaneamente diagonalizzabili e, se lo sono, determinare una base che le diagonalizza entrambe.

Esercizio 11. Siano A e B matrici che commutano e A sia diagonalizzabile.

1. E' vero che anche B è diagonalizzabile?
2. Se A non è multiplo dell'identità è vero che B è per forza diagonalizzabile?