Corso di Studi in Matematica
Istituzioni di Algebra
a.a. 2023/2024

Esercizi degli anelli/moduli

Sia A un anello con l'unità.

1. Siano

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m = A'_1 \oplus A'_2 \oplus \cdots \oplus A'_n$$

due decomposizioni di A, dove A_i e A'_j sono ideali bilateri indecomponibili di A per $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Dimostrare che

   i). $m = n$;

   ii). esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $A_i \cong A'_{\sigma(i)}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Sia M un A-modulo sinistro. Dimostrare che esiste un A-modulo sinistro libero L tale che M è isomorfo ad un quoziente L/N dove N è sottomodulo di L.

3. Sia M è un A-modulo sinistro artiniano e noetheriano. Dimostrare che

   i). M è una somma diretta (di un numero finito) dei sottomoduli indecomponibili;

   ii). M è indecomponibile se e solo se $\text{End}_A M$ è un anello locale.

4. Sia M uno spazio vettoriale a coefficiente in un corpo D. Un sottoinsieme $X \subseteq \text{End}_D M$ viene detto denso se per tutti i sottoinsiemi $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset M$ e in corrispondente $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset M$ esiste un elemento $x \in X$ tale che $xu_i = v_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dimostrare che, se A è un anello semplice, allora A è un sottoanello denso di $\text{End}_D M$ per qualche spazio vettoriale M a coefficiente in un corpo D.

5. Sia A un anello semisemplice. Dimostrare che

   i). il numero degli ideali bilateri minimali, che non contiene alcun ideale bilatero di A non-banale, è finito;

   ii). ogni elemento idempotente primitivo appartiene ad un ideale bilatero minimale di A;

   iii). ogni A-modulo è isomorfo ad una somma diretta dei moduli di forma Ae dove e è un elemento idempotente in A.

Eser: Per anelli e Moduli

1) (1) ideali bilateri di

$A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$

si usa { Sono $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$, $J_i \triangleleft A_i$

$\forall i = 1, \ldots, m.$

~~$\exists \sigma \in S_n$, A_i~~

Rif. L. Y. LAM

A first course of non-commutative ring. Chap. 1. §2.

(2) $\forall\ 1 \le i \le m$, $A_i = Ae_i$.

$C(A) \supseteq \{e_1, \ldots, e_m\}$ idempot. ort. compl. primitiv. centrale

$C(A) \supseteq \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ———

$A'_j = Ae'_j$

Rif. W. Anderson, K. Fuller, Rings and Categories of modules. GTM 13. Chap. 1. §3.

2) ✓.

3). ii). $f \in \mathrm{End}_A M$

Se f non è invertibile, $\exists m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow M = f^m M \oplus \ker f^m$.

Lemma di Fitting.

Rif: ② Chap. 2.

4). Teorema "densità" di Jacobson.

Rif: N. Jacobson: Basic Algebra

Vol. II. Chap. 4.

5). Rif. L. Rowen. Ring theory.

Chap. 2, §2.3.

Esercizi delle Rappresentazioni dei gruppi

1. Sia G un gruppo finito. Dimostrare che G è abeliano se e solo se tutte le rappresentazioni irriducibili di G a coefficienti in $\mathbb{C}$ è di grado 1.

2. Dimostrare che il numero delle rappresentazioni irriducibili non-equivalenti di un gruppo finito a coefficienti in un campo è finito.

3. Dimostrare che le rappresentazioni irriducibili reali di un gruppo ciclico infinito G hanno gradi 1 oppure 2, e esistono un numero infinito delle repppresentazioni irriducibili reali non-equivalenti di G.

4. Sia G un gruppo finito e sia $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$ l'insieme dei caratteri irriducibili di G a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia $H_{\chi_i} = \{g \in G | \chi_i(g) = \chi(1_G)\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Dimostrare che
$$\{N \subseteq G | N \lhd G\} = \{\bigcap_{i \in I} H_{\chi_i} | I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}\}.$$
Dire se è possibile usare la tabella di carattere di G a determinare la risolubilità del gruppo G.

5. Dimostrare che le rappresentazioni reale continue di un gruppo topologico compatto è completamente riducibile, senza usare la misura di Haar.

Eser: Per Grupp. rapp.

1): $G = G_1 \times \cdots \times G_n$, $G_i = \langle g_i \rangle$

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$\|$$

$$\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n \; ; \quad \rho_i : G_i \to GL(V_i).$$

$$V \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_n .$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_1 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V_2 \cdots \dim_{\mathbb{C}} V_n .$$

"$\Leftarrow$": Un gp. G è abeliano

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[G]$ è abeliano.

$$\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$$

2). ✓

3). $\{\mathbb{R}[G]\text{-moduli semplici}\} \leftrightarrow \{\text{rapp. irr. reali di } G\}$.

$$\underset{\text{semplice}}{\overset{\cup}{V}} \cong \mathbb{R}[G] / \mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[G]} V \supseteq \mathbb{R}$$

semplice $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[G]} V$ mass.

$$G = \langle g \rangle \Rightarrow \mathbb{R}[G] \cong \mathbb{R}[x, x^{-1}]$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\text{PID}}.$$

$I \vartriangleleft \mathbb{R}[x, x^{-1}]$
$\underline{\text{mass}}$

$\Rightarrow I = \mathbb{R}[x, x^{-1}] \cdot f(x)$

dove $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.
$\underline{\text{irr.}}$

$$\mathbb{R}[G] / \mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[G]} V \cong \cancel{\mathbb{R}[G]}\ \mathbb{R}[x, x^{-1}] / (f(x)) \supseteq \mathbb{R}.$$

dove $f(x)$ irr. in $\mathbb{R}[x^{-1}]$

$$\left[\mathbb{R}[x, x^{-1}] / (f(x)) : \mathbb{R} \right] = \mathrm{gd}\, f(x)$$

$\Rightarrow \mathrm{gd}\, f(x) = 1$, opp. 2.

---

4). Rif. J. Alperin, R. Bell.
Groups and Representations. GTM $\underline{162}$
$\underline{\S 15}$

5): Rif: E. B. Vinberg:

Linear representations of groups.

Chap. 1. §2.