Corso di Studi in Matematica
Istituzioni di Algebra
a.a. 2023/2024

Problemi degli anelli/moduli

Siano A un anello con unitá.

1. Siano

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m = A'_1 \oplus A'_2 \oplus \cdots \oplus A'_n$$

   due decomposizioni di A, dove A_i e A'_j sono ideali bilateri indecomponibili di A per $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Dimostrare che

   i). $m = n$;

   ii). esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $A_i \cong A'_{\sigma(i)}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Sia M un A-modulo sinistro. Dimostrare che esiste un A-modulo sinistro libero L tale che M è isomorfo ad un quoziente L/N dove N è sottomodulo di L.

3. Sia M è un A-modulo sinistro artiniano e noetheriano. Dimostrare che

   i). M è una somma diretta di un numero finito dei sottomoduli indecomponibili;

   ii). M è indecomponibile se e solo se $\mathtt{End}_A M$ è un anello locale.

4. Sia M uno spazio vettoriale a coefficiente in un corpo D. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathtt{End}_D M$ viene detto denso se per tutti i sottoinsiemi $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset M$ e in corrispondente $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset M$ esiste un elemento $x \in X$ tale che $xu_i = v_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dimostrare che, se A è un anello semplice, allora A è un sottoanello denso di $\mathtt{End}_D M$ per qualche spazio vettoriale M a coefficiente in un corpo D.

5. Sia A un anello semisemplice. Dimostrare che

   i). il numero degli ideali bilateri minimali, che non contiene alcun ideale bilatero di A non-banale, è finito;

   ii). ogni elemento idempotente primitivo appartiene ad un ideale bilatero minimale di A;

   iii). ogni A-modulo è isomorfo ad una somma diretta dei moduli di forma Ae dove e è un elemento idempotente in A.