Corso di Studi in Matematica
Istituzioni di Algebra
a.a. 2023/2024

**Problemi delle Rappresentazioni dei gruppi**

1. Sia $G$ un gruppo finito. Dimostrare che $G$ è abeliano se e solo se tutte le rappresentazioni irriducibili di $G$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ è di grado 1.

2. Dimostrare che il numero delle rappresentazioni irriducibili non-equivalenti di un gruppo finito a coefficienti in un campo è finito. item Dimostrare che le rappresentazioni irriducibili reali di un gruppo ciclico infinito $G$ hanno gradi 1 oppure 2, e esistono un numero infinito delle reppresentazioni irriducibili reali non-equivalenti di $G$.

3. Sia $G$ un gruppo finito e sia $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r\}$ l'insieme dei caratteri irriducibili di $G$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia $H_{\chi_i} = \{g \in G | \chi_i(g) = \chi(1_G)\}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Dimostrare che
$$\{N \subseteq G | N \triangleleft G\} = \{\bigcap_{i \in I} H_{\chi_i} | I \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}\}.$$
Dire se è possibile usare la tabella di carattere di $G$ a determinare la risolubilità del gruppo $G$.

4. Dimostrare che le rappresentazioni reale continue di un gruppo topologico compatto è completamente riducibile, senza usare la misura di Haar.