Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 febbraio 2024

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Su $\mathbb{R}$ si consideri la topologia $\mathcal{T}$ data da:

$$\mathcal{T} = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R}, a > 0\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Sia I_1 l'intervallo $[0, 1]$ dotato della topologia euclidea, e sia I_2 lo stesso intervallo dotato della topologia indotta da $\mathcal{T}$. Sia infine $Q = I_1 \times I_2$ con la topologia prodotto.

1. Mostrare che I_2 è compatto.
2. Sia $g\colon Q \to \mathbb{R}$ una funzione continua non costante (dove $\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea). Mostrare che $g(Q)$ è un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
3. Dire se Q è a base numerabile.

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri il sottospazio topologico X di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea dato da:

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \quad \text{dove } C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2^n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \right\}.$$

1. Per ogni punto $p \in X$, $p \neq (0, 0)$, descrivere un intorno U di p, tale che $\pi(U, p)$ sia banale.
2. Per $m \in \mathbb{N}$ fissato, poniamo $A = C_m$, $B = \bigcup_{n \neq m} C_n$. Dimostrare che A e B sono chiusi in X.

3. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ dimostrare che C_m è un retratto di X

4. Posto $q = (0,0)$, esiste un intorno U di q in X tale che $\pi(U,q)$ sia banale?

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c^{-1}\,d\,e\,a^{-1}\,b^{-1}\,c\,d^{-1}\,e^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, determinare la sua caratteristica di Eulero, e identificare la superficie.

Esercizio 4. (7 punti) Si considerino le seguenti matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ h & 2 & 0 \\ -1 & h & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Determinare i valori di h per cui A e B sono simultaneamente diagonalizzabili. In tali casi determinare una base che le diagonalizza entrambe.

Esercizio 5. (6 punti) Si considerino le coniche affini di equazioni:

(1) $-x^2 - 2xy - 3y^2 + 4y - 2 = 0$; (2) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x + 2y + 1$;
(3) $3x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$; (4) $2x^2 + 18xy + 3y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$.

(a) Si considerino le loro chiusure proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Determinarne i punti impropri.

(b) Si considerino le loro chiusure proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Quali sono proiettivamente equivalenti tra loro?

(c) Si considerino le loro chiusure proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Quali sono proiettivamente equivalenti tra loro?