Mappa di Artin idelica per est. ab $L/\mathbb{Q}$

(dando per buono K-W $\mathrm{Cond}(L/\mathbb{Q}) = m$)

$(L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ ζ rad. prim. m-esima di $1)$

$\alpha = (\alpha_v)_v \in \mathbb{I}_\mathbb{Q}$

Modifichiamo α per $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ in modo t.c.

$\beta = \lambda\alpha$ abbia $\beta_q \equiv 1 \mod m$ $\forall\, q \mid m$

$\beta_q \in 1 + m\mathbb{Z}_q$

Definiamo

$$\psi_{L/K}(\alpha) = \prod_{p \nmid m} \mathrm{Frob}_p^{v_p(\beta_p)} \quad \text{(prodotto finito).}$$

La def. è ben posta. Infatti se

$\beta = \lambda\alpha \qquad \beta' = \lambda'\alpha$

$\Rightarrow \lambda(\lambda')^{-1} \in \mathbb{Q} \qquad \lambda(\lambda')^{-1} \equiv 1 \mod m$

$\Rightarrow \forall\, p \nmid m \quad \mathrm{Frob}_p^{v_p(\beta)} = \mathrm{Frob}_p^{v_p(\beta')}$ in L perché così è in $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$

Quindi

$$\begin{tikzcd}
\psi_{L/\mathbb{Q}} : \mathbb{I}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \\
\mathbb{I}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^* \mathbb{R}_{>0} U \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dove U contiene

$$U \subseteq \prod_{p \nmid m} \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{p \mid m} (1 + m\mathbb{Z}_p)$$

$$\dashrightarrow \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^\times = Gal\left(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}\right)$$

CFT Locale

K campo locale

(est. finita di $\mathbb{Q}_p$, o di $\mathbb{F}_p((T))$ (Laurent) oppure $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Solita notazione se K è n.a.

$\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{P}_K$, π_K, v_K normalizzata, $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_K$

L/K finita n.r.

$\Rightarrow$ L/K Galois $\quad Gal(L/K) \longrightarrow Gal(k_L/k)$

$$Gal(L/K) = \langle Frob_{L/K} \rangle$$

$$Frob_{L/K}(\alpha) \equiv \alpha^q \mod \mathfrak{P}_L \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L$$

$q = |k|$

$N_{L/K} : L^* \longrightarrow K^*$

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ **Legge di reciprocità locale.**

Per ogni campo locale n.a. K esiste un unico omom. continuo

$$\phi_K : K^* \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right)$$

(K^{ab} = est. ab. massimale di K in $\overline{K}$)
soddisfacente le seguenti proprietà

A) $\forall\ \pi$ uniformizzante di K e ogni L/K abeliana finita n.r. vale

$$\phi_K(\pi)\big|_L = \mathrm{Frob}_{L/K}$$

B) $\forall\ L/K$ finita abeliana, ϕ_K induce un isomorfismo

$$\phi_{L/K} : K^\times / N_{L/K}(L^\times) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

Quindi: diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
K^\times \arrow[r, "\phi_K"] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\
K^\times / N \cdot L^\times \arrow[r, "\phi_{L/K}", "\sim"'] & \mathrm{Gal}(L/K)
\end{tikzcd}$$

SIMBOLO DI NORMA RESIDUA $\quad \phi_{L/K}(a) = (a, L/K)$

I sottogruppi

$N_{L/K}(L^\times) \subseteq K^\times$ si dicono sottogruppi di norme.

Corollario

Se esiste Φ_K come nel teorema 1 allora

a) La funzione $L \mapsto N_{L/K}(L^*)$ è una biezione

$$\left\{\begin{matrix}\text{est. finite}\\ \text{ab. } L/K\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{sottogruppo di}\\ \text{norme di } K^*\end{matrix}\right\}$$

b) $L \subseteq L' \implies N_{L/K}(L^*) \supseteq N_{L'/K}(L'^*)$

c) $N((LL')^*) = N(L^*) \cap N(L'^*)$

d) $N(L \cap L') = N(L^*) \cdot N(L'^*)$

e) ogni sottogruppo di K^* contenente un gruppo di norme è un gruppo di norme.

(Milne p. 21)

Est. ab $\longleftrightarrow$ sgp. di norme.

Continuità di $\Phi_K \iff N_{L/K}(L^*)$ sono aperti di indice finito in K^*.

Teorema 2 (Teorema di esistenza)

I sgp di norme sono esattamente i sgp. aperti di indice finito in K^*.

Oss.

1) Se $\operatorname{car}(K)=0$ tutti i sgp di indice finito

sono aperti.

2) Il risultato vale anche per K locale archimedeo.
Infatti $\mathbb{C}$ non ha est. alg. non banali.
Le est. ab. di $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, con sg. di norme $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_{>0}$
Sia H sgp di indice finito di $\mathbb{R}^*$. allora $\mathbb{R}^{*,m} \subseteq H$

$$= \mathbb{R}^* \text{ se } m \text{ dispari}$$
$$= \mathbb{R}_{>0} \text{ se } m \text{ pari}$$

$\Rightarrow H$ sgp. di norme.

3) La condizione A) del Teorema 1 afferma che se L/K finita n.r. $\Phi_K(\pi) = \mathrm{Frob}_{L/K}$ $\forall\, \pi$ uniformizzante π. Quindi $\Phi_{L/K}(u) = \mathrm{id}$ $\forall\, u \in \mathcal{O}_K^*$.

$$\Rightarrow \mathcal{O}_K^* \subseteq \ker \Phi_{L/K} \quad \forall\ L/K \text{ n.r.}$$

4) $\mathcal{O}_K^* = U_K^{(0)} \supseteq U_K^{(1)} \supseteq \ldots\ldots$
$U_K^{(m)} = 1 + \pi^m \mathcal{O}_K$ formano un sistema fondam. di intorni di 1.
Sia L/K est. ab. finita.
$\ker(\Phi_{L/K}) = N_{L/K}(L^*)$ aperto quindi contiene $U_K^{(m)}$ per qc. m.

Il più piccolo di tali m è detto conduttore di L.

Se L/K n.r $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cond}(L/K) = 0$.

L/K mod. ramificato $(p \nmid e)$

?

$\Rightarrow \mathrm{cond}(L/K) \leq 1$.

Infatti $\dfrac{1+\pi^i \mathcal{O}_K}{1+\pi^{i+1}\mathcal{O}_K}$ sono p-gruppi se $i \geq 1$

Quindi

$\Phi_{L/K}|_{U_K}$ fattorizza via $\dfrac{U_K}{1+\pi\mathcal{O}} \Rightarrow$

$\Phi_{L/K} : \dfrac{K^\times}{N(L^\times)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/K)$ (sistemi proiettivi)

Passato al limite proiettivo ci dà

$\hat{\Phi}_K : \hat{K}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$

$\uparrow$

completamento di $K^\times$ rispetto alla topologia normica in cui i sgp di norme formano un sistema fondam. di intorni di 1.

Sottogr. di norme

$K^\times = \langle \pi \rangle \times U_K \simeq \mathbb{Z} \times U_K$

$$N L^* \supsetneq \langle \pi^m \rangle \times U_K^{(m)}$$

la topologia normica ha meno aperti della top. usuale su K^*

L'identità $K^* \longrightarrow K^*$

$\uparrow$ top. usuale $\qquad \uparrow$ top. normica

completando ottengo

$$K^* \longrightarrow \widehat{K}^* \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \times U_K$$

Diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & U_K & \longrightarrow & K^* & \xrightarrow{v} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & U_K & \longrightarrow & \widehat{K}^* & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\left(U_K = \mathcal{O}_K^* = U_K^{(0)} \right)$$

6) U_K, $\widehat{\mathbb{Z}}$ sono sgp chiusi in $\widehat{K}^*$

Per corrispondenza di Galois

$$K^{ab} = (K^{ab})^{\widehat{\mathbb{Z}}} \cdot (K^{ab})^{U_K}$$
$$= \underbrace{(K^{ab})^{\phi_K(\pi)}}_{K_\pi} \cdot K^{nr}$$

$$\boxed{K^{ab} = K_\pi \cdot K^{nr}}$$

K_π è l'unione di tutte le estensioni ab.

finite L/K tali che $\pi \in N_{L/K}(L^*)$.

Queste estensioni sono tot. ramificate.

Se $\exists\, \alpha \in L$ t.c. $N(\alpha) = \pi$

$\Rightarrow (\alpha) \in \mathcal{P}_L$ e $\alpha' \in \mathcal{P}_L$ $\forall$ coniugato di α.

$\Rightarrow$ il pol. caratt. di α rispetto a L/K ha coeff. in $\mathcal{P}_L \cap K = \mathcal{P}_K$ e ha termine noto π.

$\leadsto$ per il criterio di Eisenstein è irrid.

$\leadsto L = K(\alpha) \qquad \pi = \underbrace{\prod_i (\alpha_i)}_{d} \qquad d = e$

$\Rightarrow L/K$ tot. ramificato.

Esempio

$K = \mathbb{Q}_p, \qquad \pi = p$

Troviamo

$$\mathbb{Q}_p^{ab} = \mathbb{Q}_{p,p} \cdot \mathbb{Q}_p^{nr}$$

① $\mathbb{Q}_p^{nr}$ è il composto delle est. n.r. di $\mathbb{Q}_p$ (ce ne è una per ogni grado).

Dico che

$$\boxed{\mathbb{Q}_p^{nr} = \mathbb{Q}_p(\zeta_m, \ \zeta_m \text{ radice prim. di } 1, \ p \nmid m)}$$

$\supseteq$ noto

Viceversa sia $\mathbb{F}/\mathbb{F}_p$ estensione finita di

grado t e $\mathcal{n}$o m t.c. $\mathrm{ord}_m(p) = t$.
(cioè $m \mid p^t - 1$, e t minimo per cui accade)
$[\mathbb{Q}_p(\zeta_m) : \mathbb{Q}_p] = t$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p(\zeta_m)$

② $\mathbb{Q}_{p,p} = \mathbb{Q}_p^{\phi(p)} \simeq \phi_p^{\mathbb{Z}_p^*}$

è il composto di tutte le estensioni $L/\mathbb{Q}_p$ t.c. $N(L^*) \supseteq p$

$$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \subseteq \mathbb{Q}_{p,p} \quad \forall n$$

$$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}_{p,p}.$$

$$\mathrm{lim}\ \mathrm{Gal} = \mathbb{Z}_p^* \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^*$$ suriettiva continua.

$$\mathbb{Q}_p^{ab} = \mathbb{Q}_p(\zeta \mid \zeta \text{ radice di } 1)$$
$$= \mathbb{Q}_p^{cyc}$$

Teorema di K-W locale

Ogni est. ab. di $\mathbb{Q}_p$ è contenuta in un' estensione ciclotomica.

Unicità della mappa di reciprocità locale

Dim.

Assumiamo che esista $\phi_K = \phi$

Sia π unif. di K, e poniamo

$K_{\pi,n}$ il sottocampo di K_π t.c.

$N(K_{\pi,n}^*) = \langle 1+\theta_K^n \rangle \cdot \langle \pi \rangle$

$K_\pi = \bigcup_n K_{\pi,n}$

Allora π è una norma su $K_{\pi,n}$ $\forall n$

quindi $\phi(\pi)$ agisce banalmente su K_π

e $\phi(\pi)$ agisce come Frob_p su K^{nr}.

Quindi $\phi(\pi)$ è completamente determinato su $K^{ab} = K_\pi \cdot K^{nr}$.

Quindi due mappe di reciprocità devono coincidere su ogni unif. π.

Ma K^* è generato dagli uniformizzanti

$\Rightarrow$ devono coincidere ovunque.