Def.

M G-modulo si dice indotto se $M = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} N$ per qc. N gruppo abeliano.

$$M = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$$

Shapiro: M indotto $\Rightarrow$ M aciclico.

Sia M G-modulo
C'è un omo di G-moduli

$$M \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} M = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$$
$$m \longmapsto \sum_{g \in G} m^{g} \otimes g^{-1} \qquad (*)$$

Quindi M si immerge in un mod aciclico e possiamo costruire la coom. di M via queste immersioni.

Conseguenze: ① se M è finito allora M si immerge in un mod indotto finito
$\Rightarrow H^{i}(G, M)$ finito $\forall i$.

② Se L/K Galois finito. L, K campi di numeri
$H^{i}(\mathrm{Gal}(L/K), L) = 0 \quad \forall i > 0$.

Dim

Teorema della base normale: esiste

un elemento $\alpha \in L$ t.c. $\{\sigma(\alpha) \,/\, \sigma \in Gal(L/K)\}$
è una base di L/K.
$\leadsto L = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} K \leadsto L$ aciclico. $\blacksquare$

Calcolo esplicito della coomologia di un G-mod M.

Definiamo per $i \geq 0$ un G-mod. N_i

$$N_i = \{ \phi : G^{i+1} \longrightarrow M \}$$

con azione di G data da

$$\phi^g(g_0, \dots, g_i) = \phi(g_0 g^{-1}, g_1 g^{-1}, \dots, g_i g^{-1})^g$$

N_i è un modulo indotto: $N_i = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^{G} N_{i,0}$
dove $N_{i,0} = \{ \phi \in N_i \,/\, \phi(g_0, \dots, g_i) = 0 \text{ se } g_0 \neq e \}$
$M \hookrightarrow N_0$ (funzioni costanti)
Definiamo mappe $d_i : N_i \longrightarrow N_{i+1}$ ponendo

$$(d_i \phi)(g_0, \dots, g_{i+1}) = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \phi(g_0, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{i+1})$$

La successione

$$0 \to M \to N_0 \xrightarrow{d_0} N_1 \xrightarrow{d_1} \cdots\cdots$$

è esatta $\leadsto$ è una risoluzione aciclica di M.

Calcolo esplicito della coom. di N

$$0 \longrightarrow N_0^G \xrightarrow{d_0} N_1^G \xrightarrow{d_1} N_2^G \cdots\cdots$$

N_i^G = i-cocatene omogenee.

$\ker(d_i) \cap N_i^G$ = i-cocicli (omogenei)

$\mathrm{im}(d_{i-1})$ = i-cobordi "

$Z^i(G,M)$ $\qquad$ $B^i(G,M)$

$$\boxed{H^i(G,M) = \frac{Z^i(G,M)}{B^i(G,M)}}$$

Una cocatena omogenea è determinata dal suo valore su elementi del tipo

$$(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_i)$$

Possiamo introdurre i gruppi delle cocatene non omogenee

$$C^i(G,M) = \{\varphi : G^i \longrightarrow M\}$$

con

$$d^i : C^i(G,M) \longrightarrow C^{i+1}(G,M) \text{ data da}$$

$$(d^i\varphi)(g_1,\dots,g_{i+1}) = \varphi(g_2,\dots,g_{i+1})^{g_1} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \varphi(g_1,\dots,g_j g_{j+1}, g_{j+2},\dots,g_{i+1}) + (-1)^{i+1}\varphi(g_1,\dots,g_i)$$

$$Z^i(G,M) = \ker d^i$$
$$B^i(G,M) = \operatorname{im} d^{i-1}$$
$$H^i(G,M) = Z^i / B^i$$

<u>Esempio</u>

$$Z^1(G,M) = \{ \varphi : G \to M \mid d^1\varphi = 0 \}$$
$$= \{ \varphi : G \to M \mid \varphi(g_2)^{g_1} - \varphi(g_1 g_2) + \varphi(g_1) = 0 \}$$
$$= \{ \varphi : G \to M \mid \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2)^{g_1} + \varphi(g_1) \}$$

↳ omom. incrociati

$$C^0(G,M) = \{ \varphi : \{1\} \to M \} = M$$
$$d^0(a)(g) = a^g - a \qquad \forall a \in M$$
$$B^1(G,M) = \{ \varphi \mid \varphi(g) = a^g - a \text{ per qc. } a \in M \}$$
$$H^1(G,M) = \frac{Z^1(G,M)}{H^1(G,M)}.$$

<u>Oss.</u>: se G agisce banalmente su M

$$Z^1(G,M) = \operatorname{Hom}(G,M)$$
$$B^1(G,M) = \{0\}$$
$$H^1(G,M) = \operatorname{Hom}(G,M).$$

$i = 2$

$$Z^2(G,M) = \{ \varphi : G^2 \to M \mid \varphi(g_2,g_3)^{g_1} - \varphi(g_1g_2, g_3) + \varphi(g_1, g_2g_3) + - \varphi(g_1,g_2) = 0 \}$$

cioè $\varphi(g_2,g_3)^{g_1} + \varphi(g_1,g_2g_3) = \varphi(g_1,g_2) + \varphi(g_1g_2,g_3)$

Interpretazione di H^2

Sia M un gruppo abeliano e consideriamo una ses

$$1 \to M \to E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

Possiamo scegliere una funzione $s: G \to E$ t.c. $\pi \circ s(g) = g \ \forall g$

Si ottiene azione di G su M ponendo

$m^g = s(g)\, m\, s(g^{-1})$ in E (non dipende da s)

otteniamo che

$\varphi(g,h) = s(g)s(h)s(gh)^{-1}$ è un 2 cociclo in $Z^2(G,M)$.

cambiando s, φ viene modificato per un 2. cobordo.

$H^2(G,M)$ classifica le (classi di isomorfismo) di estensioni (cioè s.e. $1 \to M \to E \to G \to 1$) con un'azione fisso di G su M.)

Funtorialità

Se $f: M \to N$ omo di G.mod.

$H(f): H^i(G, M) \longrightarrow H^i(G, N)$

(è la composizione con f sugli i-cocicli)

Studio della funtorialità in G

supponiamo che M G-modulo

$\alpha: G' \to G$

$\Rightarrow$ M è un G'-modulo e c'è un omo canonico $H^i(G, M) \longrightarrow H^i(G', M)$

sui cocicli è semplicemente la mappa indotta dalla composizione per α.

$$\varphi: G^i \longrightarrow M$$
$$\rightsquigarrow \varphi' = G'^i \longrightarrow M$$
$$\varphi'(g'_1, \dots, g'_i) = \varphi(\alpha(g'_1), \dots, \alpha(g'_i))$$

Esempio

se H sgp di G $\quad i: H \hookrightarrow G$ induce

- Restrizione: $H^i(G, M) \to H^i(H, M)$

  è la restrizione di un cociclo a H^i

- Consideriamo M G-modulo e vediamolo come H-modulo

$$\mathrm{Ind}_H^G M = M \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\text{valutare}} M$$
$$m \times g \longmapsto m^g$$

Otteniamo mappe

$$\begin{array}{ccc} H^i(G, \mathrm{Ind}_H^G M) & \longrightarrow & H^i(G, M) \\ \wr\!\wr & \nearrow & \\ \mathrm{cor}: H^i(H, M) & & \end{array}$$

omom. di corestrizione

- Vale la seguente relazione

$$\boxed{\mathrm{cor} \circ \mathrm{res} = [G : H]}$$

Corollario

Si prende $H = \{1\}$

$\leadsto$ ogni $H^i(G, M)$ è annullato da $|G|$

$\Rightarrow H^i(G, M)$ sono gruppi di torsione.

Se M è f.g. come G-modulo $\Rightarrow H^i(G, M)$ sono f.g. $\Rightarrow H^i(G, M)$ finiti

- Inflazione

Se $H \trianglelefteq G$ (normale)

$\alpha: G \longrightarrow G/H$

consideriamo l'inclusione $M^H \hookrightarrow M$
(M^H è un G/H-modulo)
Otteniamo un omomorfismo

$$H^i(G/H, M^H) \xrightarrow[\text{inflazione}]{} H^i(G, M)$$

OMOLOGIA DEI GRUPPI FINITI

M_G = coinvarianti di G
= quoziente massimale di M su cui G agisce banalmente

$$M_G = M / \langle m^g - m \mid m \in M, g \in G \rangle = M / I_G M$$

I_G = ideale di aumentazione di $\mathbb{Z}[G]$

$$= \left\{ \sum_g n_g g \;\middle|\; \sum n_g = 0 \right\}$$

Il funtore $M \longmapsto M_G$ è esatto a dx ma non a sinistra.

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

$$\dots, \; M_{1,G} \to M_{2,G} \to M_{3,G} \to 0$$

Un G-modulo M è proiettivo se per ogni suriezione $A \to B$ di G-moduli, ogni mappa $\phi : M \to B$ si solleva a una mappa

$\psi : M \longrightarrow A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ M \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\phi"] & B \end{tikzcd}$$

se M è $\mathbb{Z}[G]$-libero $\Rightarrow$ è proiettivo

$\Rightarrow$ $\exists$ risoluzione proiettiva

$$P^1 \to P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad \text{(esatto)}$$

dà origine a un complesso sui coinvarianti

$$\dots P^1_G \xrightarrow{d_1} P^0_G \longrightarrow 0$$

poniamo $\boxed{H_i = \dfrac{\ker d_{i-1}}{\operatorname{im} d_i}}$ gruppi di omologia del G-mod M

$$H_0(G, M) = M_G$$

non dipende dalla risoluzione proiettiva.

M è $\overset{\text{omologicamente}}{\text{aciclico}}$ cioè $H_i(G,M)=0 \quad \forall i \geq 1$

l'omologia si può calcolare usando risolut. acicliche.

Se $0 \to M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ ses di G-mod.

esiste les in omologia

$$\dots H_{i+1}(G,M_1) \to H_{i+1}(G,M_2) \to H_{i+1}(G,M_3) \xrightarrow{\delta} H_i(G,M_1) \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad M_{1,G} \longrightarrow M_{2,G} \longrightarrow M_{3,G} \longrightarrow 0$$

Usando la ses

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
$$\sum n_g g \longmapsto \sum n_g$$

Si ottiene

$$\underbrace{H_1(G, \mathbb{Z}[G])}_{0} \longrightarrow H_1(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \overbrace{H_0(G, I_G)}^{I_G/I_G^2} \underset{\text{nulla}}{\longrightarrow} \overbrace{H_0(G, \mathbb{Z}[G])}^{\mathbb{Z}[G]/I_G}$$
$$\longrightarrow \underbrace{H_0(G,\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_1(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_0(G, I_G) \simeq I_G/I_G^2 \longrightarrow 0$$

Proposizione

Sia G^c il sgp dei commutatori di G.

La mappa
$$G \longrightarrow I_G/I_G^2$$
$$g \longmapsto (g-1)+I_G^2$$

induce un isomorfismo $\underbrace{G/G^c}_{G^{ab}} \xrightarrow{\sim} I_G/I_G^2$

(Milne pag 77)

Conseguenza:

esiste un iso. canonico $\boxed{H_1(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} G^{ab}}$