Teorema Non esistono campi vettoriali mai nulli sulla sfera n-dimensionale S^n se n e' pari.

Dimostrazione Per assurdo assumiamo che esista un campo vettoriale mai nullo su S^n e lo usiamo per mostrare $(-1)^{n+1} = 1$. Questo porta a un assurdo nel caso n sia pari. Useremo la mappa $a : S^n \to S^n$ e l'azione di a^* su $\omega \in H^n_{DR}(S^n)$ definite nella sezione 1.2.

Sia $y(x)$ il campo vettoriale non nullo su S^n, allora

$$||y(x)|| \neq 0, \quad \forall x \in S^n.$$

A meno di normalizzare $y(x)$, possiamo assumere $||y(x)|| = 1$. Poiche' $y(x) \in T_xS^n$ si ha

$$\langle y(x), x\rangle = 0.$$

Consideriamo la mappa

$$F(x,t) : S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} \quad F(x,t) = x\cos(t\pi) + y(x)\sin(t\pi).$$

La funzione F gode delle seguenti proprieta':

- F e' continua;
- $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$||F(x,t)|| = ||x\cos(t\pi)+y(x)\sin(t\pi)|| = ||x||^2\cos^2(t\pi)+||y(x)||^2\sin^2(t\pi)+2\langle x, y(x)\rangle\cos(t\pi)\sin(t\pi)$$

  Poiche' $x \in S^n$, $||x|| = 1$, poiche' $y(x) \in T_xS^n$, $\langle x, y(x)\rangle = 0$ e infine $||y(x)|| = 1$ perche' abbiamo normalizzato il campo vettoriale. Cosi' otteniamo

$$||F(x,t)|| = \cos^2(t\pi)^2 + \sin^2(t\pi) = 1.$$

  Di conseguenza per ogni $\overline{t}$, $F(x,\overline{t})$ ha norma 1, e quindi e' un punto di S^n. Abbiamo quindi mostrato che il codominio della mappa F e' S^n, cioe' $F : S^n \times \mathbb{R} \to S^n$.
- $F(x,0) = id_{S^n}$;
- $F(x,1) = -id_{S^n} = a$.

Grazie alla funzione F si ottiene che id_{S^n} e a sono omotope.

Indichiamo con $F_t : S^n \to S^n$ la funzione $F_t(x) = F(x,t)$. Abbiamo quindi mostrato che $F_0(x) = id_{S^n}$ e $F_1(x) = a$.

La coomologia e' invariante per omotopia e quindi l'azione di F_0^* su $H^n_{DR}(S^n)$ deve conicidere con l'azione di F_1^* su $H^n_{DR}(S^n)$. Quindi abbiamo che

$$id^*_{S^n} = F_0^* = F_1^* = a^*.$$

Consideriamo l'azione di $id^*_{S^n}$ e di a^* sulla forma ω, che e' il generatore di $H^n_{DR}(S^n)$ gia' visto:

$$\omega = id^*_{S^n}(\omega) = F_0^*(\omega) = F_1^*(\omega) = a^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega.$$

Da $\omega = (-1)^{n+1}\omega$ segue $1 = (-1)^{n+1}$, che e' ovviamente assurdo se n e' pari.

L'assurdo dipende dall'esistenza della mappa F che mostra che id_{S^n} e a sono omotope. Per construire tale mappa abbiamo usato il campo vettoriale $y(x)$ mai nullo. Quindi abbiamo mostrato che tale campo vettoriale non puo' esistere se n e' pari.