• COOMOLOGIA DI DE RHAM DI $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$

UTILIZZIAMO IL RISULTATO GIÀ NOTO:

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & 0, n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E LA DESCRIZIONE DI $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ COME QUOZIENTE $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \cong S^n/\sim_{\underline{\alpha}}$ TRAMITE

LA MAPPA ANTIPODALE $\underline{\alpha} : S^n \to S^n$
$\underline{x} \to -\underline{x}$

LA MAPPA QUOZIENTE $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ È UN RIVESTIMENTO A 2 FOGLI.

STUDIAMO LE DUE MAPPE DI PULLBACK:

$\underline{\alpha}^* : \Omega^k(S^n) \to \Omega^k(S^n)$; $\underline{\alpha}^* \circ \underline{\alpha}^* = id$

$\Rightarrow \Omega^k(S^n)$ SI DECOMPONE IN SOMMA DIRETTA $\Omega^k(S^n) = \Omega^k(S^n)_+ \oplus \Omega^k(S^n)_-$

DOVE $\Omega^k(S^n)_+ = \{ \omega : \underline{\alpha}^*(\omega) = \omega \}$

$\Omega^k(S^n)_- = \{ \omega : \underline{\alpha}^*(\omega) = -\omega \}$

LA DECOMPOSIZIONE C'È ANCHE IN COOMOLOGIA

$$H^k(S^n) = H^k(S^n)_+ \oplus H^k(S^n)_-$$

PERCHÉ $\underline{\alpha}^*$ COMMUTA CON IL DIFFERENZIALE.

- $\pi^*: \Omega^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to \Omega^k(S^n)$

È INIETTIVA (SEGUE DAL FATTO CHE π È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE SURIETTIVO)

~~ANCHE~~

INOLTRE $\pi^* \circ a^* = (a \circ \pi)^* = \pi^*$

QUINDI $\pi^*: \Omega^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to \Omega^k(S^n)_+$

E LO STESSO VALE IN COOMOLOGIA

(*) $\pi^*: H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to H^k(S^n)_+$

SI DIMOSTRA CHE π^* È INIETTIVA ANCHE IN COOMOLOGIA.

QUINDI $\dim H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \leq \dim H^k(S^n)$

$\Rightarrow H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = 0$ PER $0 < k \leq n-1$

PER $\boxed{k = n}$ USO (*) E STUDIO $H^n(S^n)^+$

CALCOLANDO $a^*(\omega)$ DOVE ω È LA FORMA VOLUME DI S^n: (ESEMPIO 4.2.14 ABATE-TOVENA)

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i p^i(\underline{x})\, dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

DOVE $p^i(\underline{x}) = x^i$ È LA PROIEZIONE SULL'i-ESIMA COORDINATA (COORDINATE $(x_0, \ldots, x_n)$ DI S^n COME SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$a^*(p^i(\underline{x})) = p^i(a^*(\underline{x})) = p^i(-\underline{x}) = -p^i(\underline{x})$$

$$a^*(dx_i) = d(a(x_i)) = d(-x_i) = -dx_i$$

$$\Rightarrow a^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$$

QUINDI $a^*(\omega) = \omega \iff n$ DISPARI

$\cancel{\Rightarrow H^n(S^n)_+}$

$$\Rightarrow H^n(S^n)_+ = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \mathbb{R} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

DA CUI $H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = 0$ SE n PARI

PER CONCLUDERE NEL CASO n DISPARI POSSIAMO UTILIZZARE IL FATTO CHE (**)
$H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ È ORIENTABILE PER n DISPARI

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$ GENERATO DALLA FORMA VOLUME.

OPPURE UN RISULTATO PIÙ FORTE DELL'INIETTIVITÀ DI π^* IN COOMOLOGIA. SI PUÒ DIMOSTRARE INFATTI CHE

$$H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong H^k(S^n)_+$$

(**) SU ABATE-TOVENA L'ORIENTABILITÀ DEGLI SPAZI PROIETTIVI È NELL'ESEMPIO 4.2.16. DOVE È ANCHE LA DIMOSTRAZIONE CHE a^* CONSERVA L'ORIENTAZIONE $\iff n$ È DISPARI