- COOMOLOGIA DI DE RHAM DELLE SUPERFICI COMPATTE S_g (ORIENTABILI)

UTILIZZIAMO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI

$U \simeq \tilde{S}_{g-1} = S_{g-1} \setminus \{pt\}$

$V \simeq \tilde{T} = T \setminus \{pt\}$

$U \cap V \simeq S^1$

$U \simeq S_{g-1} \setminus \{pt\}$ $\quad$ $V \simeq T \setminus \{pt\}$

$U \cap V$  $\simeq S^1$

$\simeq$ OMOTOPIA

$$0 \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S_g)} \to \underset{\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^0(\tilde{T})} \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S^1)} \xrightarrow{\delta^0}$$

$$\to H^1(S_g) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^1(\tilde{T}) \xrightarrow{\beta^1} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^1(S^1)} \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\to H^2(S_g) \to H^2(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^2(\tilde{T}) \to 0$$

- PER PROCEDERE CALCOLIAMO LA COOMOLOGIA DI DE RHAM DEL TORO BUCATO $\tilde{T}$ E DELLA SUPERFICIE BUCATA $\tilde{S}_{g-1}$

INOLTRE PROCEDEREMO PER INDUZIONE SU g

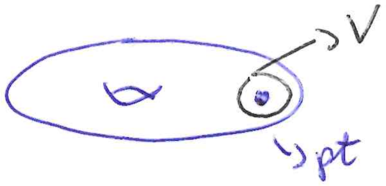
- COOMOLOGIA DI $\tilde{T} = T \setminus \{pt\}$

CONOSCO LA COOMOLOGIA DI T:

$$H^k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} & k=1 \\ \mathbb{R} & k=2 \end{cases}$$

UTILIZZO LA SUCC. DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI $U = T \setminus \{pt\}$

V APERTO DI T CONTENENTE pt E DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^2$



$$U \cap V \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{pt\} \sim S^1$$

OSS. IN QUESTO CASO CONOSCO $H^k(T)$ E VOGLIO CALCOLARE $H^k(U) = H^k(\tilde{T})$

$$0 \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(T)} \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(\tilde{T})} \oplus \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\beta^0} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(U\cap V)} \to$$

$$\to \underset{\cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^1(T)} \xrightarrow{\alpha^1} H^1(\tilde{T}) \oplus \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\beta^1} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^1(U\cap V)} \xrightarrow{\delta}$$

$$\to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^2(T)} \to H^2(\tilde{T}) \oplus \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^2(\mathbb{R}^2)} \to 0$$

SOMMA ALTERNA DELLE DIMENSIONI:

$$1 - 2 + 1 - 2 + \dim H^1(\tilde{T}) - 1 + 1 - \dim H^2(\tilde{T}) = 0$$

$$\Rightarrow \dim H^1(\tilde{T}) = \dim H^2(\tilde{T}) + 2$$

SE DIMOSTRO CHE δ^1

È UN ISOMORFISMO POSSO CONCLUDERE

CHE $H^2(\tilde{T}) = 0$ DA CUI $H^1(\tilde{T}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

INFATTI SE HO UNA SUCCESSIONE ESATTA

DI SPAZI VETTORIALI

$$\dots \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

E α È ISOMORFISMO $\Rightarrow$ $C = 0$ PERCHÉ

$B = \operatorname{Im}\alpha = \ker\beta$ E β È SURIETTIVA.

DIMOSTRIAMO ORA CHE δ^1 È UN ISOMORFISMO

(ESERCIZIO)

$$\delta^1 : \underbrace{H^1(S^1)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H^2(T)}_{\cong \mathbb{R}}$$

È UNA APPL. LINEARE TRA SP. VETT. DI DIM. 1

$\Rightarrow$ SE NON È IDENTICAMENTE NULLA È

UN ISOMORFISMO.

$U \cap V \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ E $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ È

UN GENERATORE DI $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

SI DIM. CHE $\delta^1([\omega]) \neq 0$

<u>OSS.</u> SUL FILE IN PIATTAFORMA TRATTO DA

"INTRODUCTION TO MANIFOLDS" DI L. W. TU

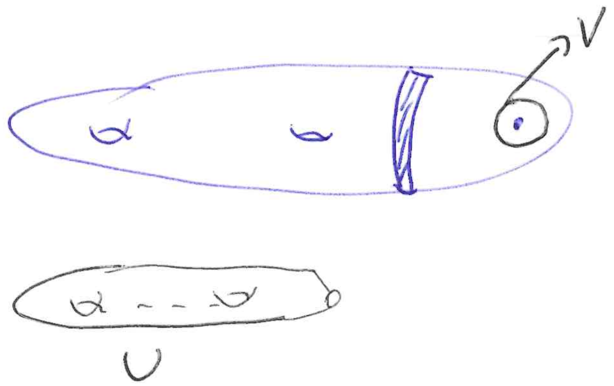
C'È UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA: SI FA ~~...~~ VEDERE CHE LA MAPPA $\beta^1 : H^1(\tilde{T}) \to H^1(S^1)$ È NULLA $\Rightarrow$ ~~...~~ $\ker\beta^1 \cong H^1(\tilde{T}) = \mathrm{Im}\,\alpha^1 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\,\beta^1 = 0 = \ker\gamma^1 \Rightarrow H^2(\tilde{T}) = 0$

QUINDI $H^k(\tilde{T}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & k=1 \\ 0 & k=2 \end{cases}$

- COOMOLOGIA DI $\tilde{S}_{g-1} = S_{g-1} \setminus \{pt\}$

UTILIZZIAMO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI



$U = \tilde{S}_{g-1}$

V = APERTO DI S_{g-1} CONTENENTE pt E DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^2$

$U \cap V \simeq S^1$

OSS PROCEDIAMO ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER $\tilde{T}$: UTILIZZIAMO LA COOMOLOGIA DI S_{g-1} PER CALCOLARE LA COOMOLOGIA DI $\tilde{S}_{g-1}$.

A QUESTO PUNTO ENTRA IN GIOCO L'INDUZIONE SU g:

SUPPONIAMO NOTA LA COOMOLOGIA

DI S_{g-1} : $H^k(S_{g-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1} & \\ \mathbb{R} & k=2 \end{cases}$

IL PRIMO PASSO DELL'INDUZIONE

È $H^k(T)$, NOTA.

$$0 \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S_{g-1})} \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{\oplus \mathbb{R}}{H^0(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\beta^0} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S^1)} \xrightarrow{\delta^0}$$

$$\to \underset{\mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1}}{H^1(S_{g-1})} \xrightarrow{\alpha^1} \underset{\Rightarrow \mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1}}{H^1(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\beta^1} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^1(S^1)} \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^2(S_{g-1})} \to \underset{\Rightarrow 0}{H^2(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^2(\mathbb{R}^2)} \to 0$$

- SI DIM. CHE δ^1 È UN ISOMORFISMO $\Rightarrow H^2(\tilde{S}_{g-1}) =$ (SIMILE AL CASO DI $\tilde{T}$, NON LO DIM.)

$\Rightarrow \operatorname{Im} \beta^1 = 0 \Rightarrow \ker \beta^1 = H^1(\tilde{S}_{g-1}) = \operatorname{Im} \alpha^1$

$\Rightarrow \alpha^1$ È SURIETTIVA.

$\hookrightarrow$ PERCHÉ β^0 È NON NULLA: È UNA RESTRIZIONE

INOLTRE $\operatorname{Im} \beta^0 \cong \mathbb{R} = \ker \delta^0 \Rightarrow \delta^0 \equiv 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \delta^0 = 0 = \ker \alpha^1 \Rightarrow \alpha^1$ INIETTIVA

$\Rightarrow \alpha^1$ ISOMORFISMO

$\Rightarrow H^1(\tilde{S}_{g-1}) \cong \mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1}$

A QUESTO PUNTO TORNIAMO ALLA SUCCESSIONE DI MAYER–VIETORIS INIZIALE SU Σ_g:

$$0 \to \underset{\mathbb{R}}{H^0(\Sigma_g)} \to \underset{\mathbb{R}\,\oplus\,\mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^0(\tilde{T})} \to \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^1)} \to$$

$$\to \underset{\Rightarrow\, \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g}{H^1(\Sigma_g)} \to \underset{\mathbb{R}^{2g-2}\,\times\,\mathbb{R}^2}{H^1(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^1(\tilde{T})} \xrightarrow{\beta^1} \underset{\mathbb{R}}{H^1(S^1)} \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\to \underset{\mathbb{R}}{H^2(\Sigma_g)} \to \underset{= 0}{H^2(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{= 0}{H^2(\tilde{T})} \to 0$$

~~TRAMITE LA~~ CALCOLANDO LA SOMMA ALTERNA DELLE DIMENSIONI OTTENIAMO

$$H^1(\Sigma_g) \simeq \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$$

<u>N.B.</u> HO SUPPOSTO NOTO CHE

$$H^2(\Sigma_g) = \mathbb{R}$$

(VERO PER LA DUALITÀ DI POINCARÉ)

VEDERE FILE IN PIATTAFORMA (DA "INTRODUCTION TO ~~DIFFERENTIAL~~ MANIFOLDS") PER UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA (PAG. ~~28~~ 265 FINE DEL CALCOLO DI $H^k(\Sigma_2)$).