GRUPPI DI TATE

G gruppo finito, M G-modulo.

$H^i(G, M)$ coomologia

$H_i(G, M)$ omologia.

$$G^{ab} \simeq H_1(G, \mathbb{Z})$$

Teorema (LRL)

K campo locale

$\exists (!)$ $\phi_K : K^\times \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right)$

t.c.

(a) $\forall$ L/K nr. e π uniformizzante di $K^\times$

$$\phi_{L/K} : K^\times \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right) \xrightarrow{Res} Gal\left(L/K\right).$$

$$Gal\left(L/K\right) = \langle Gal\left(L/K\right) \rangle$$

$$\phi_{L/K}(\pi) = Frob_{L/K}$$

(b) $\forall$ L/K ab. finita

$\phi_{L/K}$ induce un isom. $K^\times / NL^\times \xrightarrow{\sim} Gal\left(L/K\right)$.

Teorema di esistenza

Ogni sottogruppo (aperto) di indice finito di $K^\times$ è un sgp di norme.

G gruppo finito.

M G-modulo

$$N_G : M \longrightarrow M$$
$$m \longmapsto \sum_{g \in G} m^g$$

N_G induce un omomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H_0(G, M) & \longrightarrow & H^0(G, M) \\ \parallel & & \parallel \\ M_G & & M^G \\ \text{coinvarianti} & & \text{invarianti} \end{array}$$

Poniamo

$$H_T^i = \begin{cases} H^i(G, M) & \text{se } i > 0 \\ M^G / N_G M & \text{se } i = 0 \\ \ker(N_G) / I_G M & \text{se } i = -1 \\ H_{-i-1} & \text{se } i < -1 \end{cases}$$

Data ses $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ di G-moduli $\rightsquigarrow$ les

$$\cdots\cdots H_T^{i-1}(G, M') \to H_T^{i-1}(G, M) \to H_T^{i-1}(G, M'') \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H_T^i(G, M') \cdots\cdots$$

<u>Oss.</u>

Se M è indotto $\rightsquigarrow$ $H_T^i(G, M) = 0$ per ogni i.

COOMOLOGIA DI TATE DEI GRUPPI CICLICI FINITI

Se G ciclico finito esiste isomorfismo

$$H_T^i(G,M) \longrightarrow H_T^{i+2}(G,M) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

In particolare data $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ la les associata è un "esagono"

$$\begin{tikzcd} & H_T^{-1}(G,M) \arrow[r] & H_T^{-1}(G,M'') \arrow[dr, "\delta"] & \\ H_T^{-1}(G,M') \arrow[ur] & & & H_T^0(G,M') \arrow[dl] \\ & H_T^0(G,M'') \arrow[ul, "\delta"] & H_T^0(G,M) \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Quoziente di Herbrand

$$h(M) = \frac{\# H_T^0(G,M)}{\# H_T^{-1}(G,M)} \quad (\text{se finiti})$$

dall'esattezza dell'esagono si deduce che se due tra M', M, M'' hanno q. di Herbrand allora anche il terzo ce l'ha.

$$h(M) = h(M')h(M'').$$

Inoltre se M è finito $\Rightarrow h(M) = 1$.

Infatti dalle s.e.

$$0 \longrightarrow M^G \longrightarrow \underset{m}{M} \longrightarrow \underset{m^g - m}{M} \longrightarrow M_G \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_T^{-1}(G,M) \longrightarrow M_G \xrightarrow{N_G} M^G \longrightarrow H_T^0(G,M) \longrightarrow 0$$

si trova che M_G e M^G hanno lo stesso ordine quindi anche $H_T^{-1}(G,M)$ e $H_T^0(G,M)$.

Funtorialità nei gruppi di coom. di Tate

Se M G-modulo

M' G'-modulo

$\alpha : G' \longrightarrow G$ $\beta : M \longrightarrow M'$ (compatibile con α)

allora si hanno omo canonici

$$H^i(G,M) \longrightarrow H^i(G',M')$$

in generale non si hanno per H_i, H_T^i $(i \leq 0)$ a meno di avere condizioni più restrittive (per es. se β induce una mappa ben definita

$$M_G \longrightarrow M'_{G'}$$

per es. questo vale se α suriettiva).

COOMOLOGIA DEI GRUPPI PROFINITI

$G = \varprojlim G_i$ con topologia.

Un G-modulo **discreto** è un G-modulo per il quale l'azione

$G \times M \longrightarrow M$ è continua dando a M la topologia discreta.

Equivalentemente:

- $M = \bigcup_{H} M^H$

H sottogruppi aperti di G.

- $\forall m \in M$ lo stabilizzatore di m è aperto.

G-mod. discreti ha abbastanza iniettivi

$\rightsquigarrow H^i(G, M)$

se $G = \varprojlim_s G_s$ risulta

$$\boxed{H^i(G, M) = \varinjlim_s H^i(G_s, M^{H_s})}$$ dove

$H_s = \ker : G \longrightarrow G_s$

e il limite induttivo del sistema diretto è dato dalle mappe di inflazione

$$H^i(G_s, M^{H_s}) \longrightarrow H^i(G_t, M^{H_t})$$

se $\pi_{st} : G_s \longrightarrow G_t$.

$\pi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$

$\varinjlim M_i = \bigcup_i M_i / \sim$

$x_i \in M_i \sim x_j \in M_j$

se $\exists\, k \geq i,\ k \geq j$

t.c. $\pi_{ik}(x_i) = \pi_{jk}(x_j)$

$$\pi_{st} : G_s \longrightarrow G_t$$

induce

$$\varphi_{st} : H^i(G_s, M^{H_s}) \xrightarrow{\text{Infl}} H^i(G_t, M^{H_t})$$

La rappres. concreta attraverso cocatene, cocicli e cobordi vale ancora considerando solo cocicli continui $\varphi : G^i \longrightarrow M$ (soddisfacenti le opportune relazioni).

<u>Oss.</u> si generalizza a gruppi profiniti <u>solo</u> la coomologia.

Se G finito

$$G^{ab} \simeq H_1(G, \mathbb{Z}) = H_T^{-2}(G, \mathbb{Z})$$

e inoltre se L/K est. finita Galois $G = Gal(L/K)$

$$K^* / NL^* = H_T^0(G, L^*)$$

$$\simeq \quad (L^*)^G / NL^* = K^* / NL^*$$

Vogliamo costruire un isomorfismo funtoriale

$$H_T^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_T^0(G, L^*)$$

Discende dal seguente

Teorema

$\forall$ estensione L/K di campi locali con $G = Gal(L/K)$ esiste un isomorfismo canonico

$$H_T^i(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_T^{i+2}(G, L^*) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Teorema

K^{nr} max est. non ram. di K in $\bar{K}$

$$Gal(K^{nr}/K) \simeq Gal(\bar{k}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{c} \bar{K} \\ | \\ K^{nr} \\ | \\ K \end{array}$$

K campo locale.

Esistono isomorfismi canonici

(1) $$H^2(Gal(K^{nr}/K), (K^{nr})^*) \xrightarrow[\text{Infl}]{\sim} H^2(Gal(\bar{K}/K), \bar{K}^*)$$

(2) $$inv_K : H^2(Gal(\bar{K}/K), \bar{K}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$\hookrightarrow$ invariante locale

(inflazione: $H^i(G/H, M^H) \longrightarrow H^i(G, M)$)

Precisamente risulterà che se $[L:K] = n$

$$inv_{L/K} : H^2(Gal(L/K), L^*) \longrightarrow \frac{\frac{1}{n}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$$

compatibili con l'inflazione.

Notazione $\quad H^i(Gal(L/K), L^*) =: H^i(L/K)$

$H^2(\bar{K}/K)$ si dice gruppo di Brauer di K.
(parametrizza le algebre centrali semplici su K, argomento di approfondimento)

$inv_K : H^2(\bar{K}/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
dice che
le algebre centrali semplici di dim n^2 ↪ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[n]$

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[n] = \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Per $n=2$ $\quad H^2(\bar{K}/K)[2] \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

algebre di quaternioni su un campo locale.

Coomologia galoisiana locale

1) Teorema 90 di Hilbert

K locale $\quad L/K$ finita galois

$H^1(L/K) = 0$

Dim.

Sia $G = Gal(L/K)$

$\varphi : G \longrightarrow L^* \qquad$ 1-cociclo

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\tau)^{\sigma}\varphi(\sigma) \quad \forall \sigma, \tau \in G.$$

Sia $a \in L^{\times}$ e poniamo

$$b = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\, a^{\sigma}$$

$\forall \tau \in G$

$$b^{\tau} = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)^{\tau} a^{\sigma\tau} = \sum_{\sigma \in G} a^{\sigma\tau} \varphi(\sigma\tau)\varphi(\tau)^{-1}$$

$$= \varphi(\tau)^{-1} b$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\tau) = b(b^{\tau})^{-1} \rightsquigarrow \varphi \in B(G, L^{*}).$$

se $b \neq 0$.

Basta provare che $\exists a$ t.c. $b \neq 0$

Discende dal Teorema di Dedekind di indip. lineare dei caratteri:

G gruppo finito $\quad \varphi_1 \dots \varphi_r : G \longrightarrow K^{\times}$

allora $\forall a_1, \dots, a_r \in K$

$$\sum a_i \varphi_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_r = 0. \quad \blacksquare$$

② Se L/K finita e n.r. allora

$$N_{L/K} : U_L \longrightarrow U_K \quad \text{è suriettiva.}$$

$$U_L = \mathcal{O}_L^{\times}, \quad U_K = \mathcal{O}_K^{\times}$$

<u>Dim.</u> se L/K estensione di campi finiti allora $N_{L/K} : L^{\times} \longrightarrow K^{\times}$ è suriettiva:

infatti L^* è finito ed è un $G = Gal(L/K)$-mod.

$h(L^*) = 1 \qquad H^1_T(L/K) = 1 \rightsquigarrow$

$H^0_T(L/K) = 0 \quad \left|\frac{K^*}{NL^*}\right| = 1 \rightsquigarrow NL^* = K^*$

Sia π uniformizzante di K

allora π è anche unif. di L

$$\begin{tikzcd}
1+\pi^m\mathfrak{a} \arrow[d] & \frac{1+\pi^m\mathcal{O}_L}{1+\pi^{m+1}\mathcal{O}_L} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\wr"] & \frac{1+\pi^m\mathcal{O}_K}{1+\pi^{m+1}\mathcal{O}_K} \arrow[d, "\wr"] \\
\bar{\mathfrak{a}} & k_L \arrow[r, "t_2"] & k_K
\end{tikzcd}$$
suriettivo

Si utilizza questo diagramma per dimostrare che se $u \in U_K$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x_m \in U_L$ t.c.

$Nx_m \equiv u \mod \pi^m\mathcal{O}_K$

$x = \lim x_m$ ha norma u

$\in U_L$.

Corollario

Se L/K è n.r. allora $H^i_T(Gal(L/K), U_L) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Dim.

$\rightsquigarrow Gal(L/K) \simeq Gal\left(\frac{k_L}{k_K}\right)$ ciclico per $i=0$ $\qquad H^0_T(L/K) = \dfrac{U_K}{NU_L} = 1.$

$\hookrightarrow H^1_T(G, U_L) = 1$

per $i=1$

$\hookrightarrow$ da rivedere!

$G = Gal(L/K)$