Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Geometria superiore

Esercizi - Galluzzi

Esercizio 1

Dimostrare che i campi irrotazionali (1-forme differenziali chiuse) nel piano bucato $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ o sono conservativi (esatte) o sono multipli di $\omega = \dfrac{-y\ dx + x\ dy}{x^2 + y^2}$.

Esercizio 2

Dimostrare che se $f : V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale tale che $f^2 = id,$ allora V si decompone in somma diretta $V = V_+ \oplus V_-$ dove V_+ è il sottospazio dei vettori f-invarianti, cioè tali che $f(v) = v$ e V_- è il sottospazio dei vettori f-anti-invarianti, cioè tali che $f(v) = -v$. (*Sugg.*) I vettori della forma $v + f(v)$ sono f-invarianti e quelli della forma $v - f(v)$ sono f-anti-invarianti. Può essere utile pensare al caso particolare già visto della decomposizione dello spazio delle matrici quadrate in matrici simmetriche e anti-simmetriche : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. In questo caso l'endomorfismo è la trasposizione.

Esercizio 3

Sia $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = S^n / \sim_a$ il rivestimento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dato dalla mappa quoziente associata alla mappa antipodale di S^n : $a : S^n \to S^n$, $\underline{x} \mapsto -\underline{x}$.

(a) Dimostrare che $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to \Omega^k(S^n)$ è iniettivo.

(b) Dimostrare che $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \to \Omega^k(S^n)_+$ è un isomorfismo. (*Sugg.* Data una forma η in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, su un aperto di $\mathbb{R}^n$ con coordinate $x_1, ...x_n$, la forma $\frac{1}{2}(\eta + a^*\eta)$ è una forma su S^n, con le stesse coordinate ed è invariante).

(c) Il pull-back della mappa antipodale commuta con il differenziale, quindi $\{(\Omega^k(S^n)_+, d^k)\}$ è un complesso : sono ben definiti i gruppi di coomologia di de Rham a-invarianti $H^k(S^n)_+$. Dimostrare che l'isomorfismo del punto precedente induce un isomorfismo in coomologia : $H^k(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong H^k(S^n)_+$.

Esercizio 4

Dare un esempio di ricoprimento di una varietà differenziabile che non sia aciclico. Esibire un ricoprimento aciclico di S^1.

Esercizio 5

Sia T il toro e sia $T - \{p\}$ il toro meno un punto. Sia

$$\delta^1 : H^1(\mathbb{R}^2 - \{p\}) \to H^2(T)$$

la mappa di connessione della successione esatta lunga di Mayer-Vietoris associata alla coomologia di T con i due aperti $U = T - \{p\}$ e V aperto diffeomorfo a $\mathbb{R}^2$ contenente p (e quindi con $U \cap V \sim \mathbb{R}^2 - \{p\}$). Dimostrare che δ è un isomorfismo provando che è una mappa non nulla.

(Sugg. Provare che $\delta^1([\omega]) \neq 0,$ dove $\omega = \dfrac{-y\ dx + x\ dy}{x^2+y^2}$. In alternativa, utilizzare Lemma 27.3 di "Introduction to Manifolds" di L.W. Tu , file in piattaforma "Coomologia del toro e di S_2")

Esercizio 6

Provare che la sfera S^2 e il toro non sono diffeomorfi.

Esercizio 7

Data $\omega \in \Omega^k(M)$ dimostrare che $\mathrm{supp}(d\omega) \subset \mathrm{supp}(\omega)$.

Esercizio 8

Scrivere nel dettaglio la dimostrazione del Teorema di Stokes per $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$.

Esercizio 9

Sia $\pi : \tilde{M} \to M$ un rivestimento (topologico) finito. Dimostrare che se M è compatta anche $\tilde{M}$ lo è.

Ricordiamo la definizione di rivestimento tra due spazi topologici: π è suriettiva e ogni punto $p \in M$ possiede un intorno connesso U *ben rivestito*, cioè π ristretto a una qualsiasi componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ è un omemomorfismo. E' finito se $\pi^{-1}(p)$ è un insieme finito per ogni $p \in M$. Ricordiamo anche che un rivestimento è una mappa aperta (vedi anche Def. 2.2.16 di rivestimento liscio su Abate -Tovena).