1.

DUALITÀ DI POINCARÉ (5.6. ABATE-TOVENA)

SIA M UNA VARIETÀ DIFFERENZIABILE DI DIM. M ORIENTATA (SENZA BORDO) L'APPLICAZIONE LINEARE

$$\int_M : H^k(M) \longrightarrow H_c^{n-k}(M)^*$$
$$[\omega] \longmapsto [\tau] \longrightarrow \int_M [\omega \wedge \tau]$$

(BEN DEFINITA PER IL TEOREMA DI STOKES E LE PROPRIETÀ DI $\wedge$)

È UN ISOMORFISMO.

LA DIMOSTRAZIONE CONSISTE DI VARI PASSAGGI:

- PROPOSIZIONE 5.6.2.
  SIANO $U, V \subset M$ APERTI. ALLORA IL DIAGRAMMA OTTENUTO COMBINANDO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS CON LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS A SUPPORTO COMPATTO (DUALE) È COMMUTATIVO A MENO DEL SEGNO.
  (DIM. PARZIALE)

- LEMMA DEI CINQUE 5.6.4.
  (SENZA DIM.)

• LEMMA DI POINCARÉ A SUPPORTO COMPATTO: $H^k_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathbb{R} & k = n \end{cases}$

DIM. SOLO DEL CASO $n = 1$ (ESEMPIO 5.5.3)

OSS. (1) IL RISULTATO PER $\mathbb{R}^n$ SI OTTIENE DIMOSTRANDO CHE PER OGNI VARIETÀ M C'È UN ISOMORFISMO: $H^k_c(M) \to H^{k+1}_c(M \times \mathbb{R})$ E POI PER INDUZIONE SU n.

(2) SU ABATE-TOVENA C'È LA DIM. NEL CASO GENERALE. NOI DIM. SOLO NEL CASO M DI TIPO FINITO E PROCEDIAMO PER INDUZIONE SUL NUMERO S DI APERTI DI UN RICOPRIMENTO ACICLICO FINITO.

USIAMO QUESTA DEF. DI RICOPRIMENTO ACICLICO: SE $U_1 \cap \ldots \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_2$ È DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^{\boxed{m}}$

$n = \dim M$

$\boxed{S=1}$ $M = U_1$

U_1 È DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^n$ PER IPOTESI.

DIM. CHE $\int_{\mathbb{R}^n} : H^0(\mathbb{R}^n) \to H^n_c(\mathbb{R}^n)^*$ È UN ISOMORFISMO

ESSENDO DOMINIO E CODOMINIO SP. VETT. DI DIM. 1 $^{(\square)}$ È SUFFICIENTE DIM. CHE $\int_M$ NON È L'APPLICAZIONE NULLA. SIA $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ UNA FUNZIONE C^∞ A SUPPORTO COMPATTO CON $\int e \, dt = 1$

ALLORA (LA CLASSE DI COOMOLOGIA DI) $\varepsilon = \underset{e(x_1)\cdot\ldots\cdot e(x_n)}{\underset{\shortparallel}{e}} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in A^n_c(\mathbb{R}^n)$ È UN GENERATORE DELLA COOMOLOGIA $H^n_c(\mathbb{R}^n)$. (VEDI OSS. 5.5.13 ABATE-TOVENA)

QUINDI
$$\int_M : H^0(\mathbb{R}^n) \to H^n_c(\mathbb{R}^n)^*$$
$$1 \longmapsto [\varepsilon] \mapsto \int_M \varepsilon = 1 \neq 0. \quad ✓$$

ORA SUPPONIAMO VERA LA DUALITÀ PER OGNI VARIETÀ DI TIPO FINITO CHE ABBIA UN RICOPRIMENTO ACICLICO FINITO COSTITUITO DA $r < s$ APERTI.

SIA $\{U_i\}_{i=1,\ldots,s}$ UN RICOPRIMENTO ACICLICO FINITO DI M

($\square$) SI PUÒ DIM. CHE SE M DIFFEOMORFA A $\mathbb{R}^n \Rightarrow H^k_c(M) \cong H^k_c(\mathbb{R}^n)$. LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA AL CASO GIÀ VISTO DI $H^k_{\#}(M)$

4

CONSIDERIAMO IL RICOPRIMENTO

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_{s-1}$$

$$V = U_s$$

$U \cup V = M \qquad U \cap V = (U_1 \cap U_s) \cup \dots \cup (U_{s-1} \cap U_s)$

PER L'IPOTESI INDUTTIVA LA DUALITÀ VALE PER $U, V, U \cap V$.

$\Rightarrow$ VALE PER M PER IL LEMMA DEI CINQUE

E LA PROP. 5.6.2.

V