

Se \mathbb{L}/\mathbb{K} m.r. allora $H^0_T(\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), U_{\mathbb{K}}) = 0$ $\forall \mathbb{K} \in \mathbb{X}$.

Dim.

$\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ ciclico m.s. basta provare per $i=0, i=1$

Per $i=0$ $H^0_T(\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), U_{\mathbb{K}}) = \frac{U_{\mathbb{K}}}{N U_{\mathbb{K}}} = 1$.

Per $i=1$ consideriamo la s.e.s.

$$1 \rightarrow U_L \rightarrow L^* \xrightarrow{\psi} \mathbb{K} \rightarrow 0$$

Troviamo

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(G, L^*) & \rightarrow & H^0(G, \mathbb{K}) & \rightarrow & H^1(G, U_L) & \rightarrow & H^1(G, L^*) \\ \mathbb{K}^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{K} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, U_L) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & & (\text{so Hilbert}) \end{array}$$

δ è nullo

ψ nullo $\Rightarrow \ker \delta = \mathbb{K} \Rightarrow \delta$ nulla + nullo
 $\rightarrow H^1(G, U_L) = 1$. \blacksquare

Obielhi intermedi:

$$\textcircled{1} \quad H^2\left(\frac{\mathbb{K}^m}{\mathbb{K}}\right) \rightarrow H^2\left(\frac{\bar{\mathbb{K}}}{\mathbb{K}}\right) \quad \boxed{H^i\left(\frac{\mathbb{L}}{\mathbb{K}}\right) = H^i\left(\text{Gal}\left(\frac{\mathbb{L}}{\mathbb{K}}\right), L^*\right)}$$

isomorfismo

$$\textcircled{2} \quad H^2\left(\frac{\bar{\mathbb{K}}}{\mathbb{K}}\right) = Br(\mathbb{K}) \simeq \frac{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}{\mathbb{K}} = \mu_\infty$$

$\xrightarrow{\text{inv}_K}$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\frac{1}{m}\mathbb{K}}{\mathbb{K}}$$

$$\therefore \frac{1}{n}\frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} \simeq \frac{\mathbb{K}}{n\mathbb{K}}.$$

Se \mathbb{Q}/K n.r.

$$1 \rightarrow U_L \rightarrow L^* \rightarrow \mathbb{X} \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_T^0(G, U_L) & \longrightarrow & H_T^0(G, L^*) & \xrightarrow{\sim} & H_T^0(G, \mathbb{X}) & \rightarrow & H_T^1(G, U_L) \\ \text{``} & & \text{``} & & \text{``} & & \text{``} \\ 0 & & K^*/\overline{NL^*} & & \overline{NL}/\overline{n\mathbb{X}} & & 0 \\ & & \parallel & & \overline{\mathbb{X}}/\langle |G| \rangle & \xrightarrow{\sim} G & \parallel \\ & & H_T^2(G, L^*) & & & & G^{\text{ab}} \end{array}$$

Ora consideriamo le nes di G -mod banale.

$$0 \rightarrow \mathbb{X} \rightarrow Q \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{X} \rightarrow 0$$

Q è G -mod uguale ns coom. banale.

$$\rightsquigarrow \exists \text{ usau. } H_T^0(G, \mathbb{X}) \longrightarrow H_T^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{X})$$

$$\begin{array}{c} H_T^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{X}) \\ \parallel \\ H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{X}) = \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{X}) \\ \parallel \\ \mathbb{Q}/\mathbb{X} \end{array}$$

canonico
perché G

ha un generatore canonico.

Quindi se \mathbb{Q}/K n.r. $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ esiste

$$H^2(G, L^*) \xrightarrow{\sim} H^0(G, L^*) \simeq H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{X}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{X}$$

$$\mathbb{Q}/\mathbb{X}$$

compatibile con i punti di etti. m.s

i.e.

$$H^2\left(\frac{K'''}{K}\right) \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

Caso ciclico generale

Sia \mathbb{L}/K ciclico ma possibilmente ramificato.

$$G = Gal\left(\frac{\mathbb{L}}{K}\right).$$

$$H^0 \rightsquigarrow H_T^0\left(\frac{\mathbb{L}}{K}\right) = 0$$

$$\text{Calcoliamo } H_T^0\left(\frac{\mathbb{L}}{K}\right)$$

Provveremo che $|H_T^0\left(\frac{\mathbb{L}}{K}\right)| = [L : K]$.

Lemma

Se \mathbb{L}/K finito Galois

esiste un G -sottomodulo V di \mathcal{O}_L t.c.

$$H^i(G, V) = 0 \quad \forall i > 0.$$

Dim.

Esiste una base monomiale di L contenuta in \mathbb{Q}
(cioè $\alpha \in \mathcal{O}_L$ t.c. $(\alpha^g)_{g \in G}$ p.e.).

Posto $V = \sum_g \mathcal{O}_K \alpha^g$, V è modolo

$$V = \bigcup_{g \in G} \mathcal{O}_K. \quad \square$$

Lemme

Sia \mathbb{F}_p campo Galois $U_L = \mathcal{O}_L^\times$
 esiste $W \subseteq U_L$ aperto, stabile per G
 e t.c. $H^i(G, W) = 0 \quad \forall i >$

Dim.

$$\exp : \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_L^\times$$

$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

è un isomorfismo locale
 presso 0 sufficientemente divisibile per p
 V ed è fatto sopra sto nel cerchio di conv.
 della serie \exp . Quindi non può prendere
 $W = \exp(V)$. \blacksquare

$$U_L \text{ compatto} \quad W \subseteq U_L \text{ aperto} \rightsquigarrow \frac{U_L}{W} \text{ punto.}$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{U_L}{W}\right) = 1$$

$$1 \rightarrow W \rightarrow U_L \rightarrow \frac{U_L}{W} \rightarrow 1$$

$$h(U_L) = h(W) = 1$$

$$\text{De } 1 \rightarrow U_L \rightarrow L^\times \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Si ottiene $h(L^*) = h(U) h(\chi) = h(\chi)$

$$\frac{|H_T^0(G, \chi)|}{|H_T^1(G, \chi)|}$$

$$= \frac{|G^{ab}|}{\underbrace{|Hom(G, \chi)|}_{=1}} = |G| = [L:K].$$

$$\text{Ma } h(L^*) = |H_T^0(G, L^*)| = \left| \frac{\kappa^*}{NL^*} \right|$$

Conclusione: G ciclico ins $|H_T^0(G, L^*)| = [L:K]$.

Caso generale



Successione di scomposizione - restrizione

G finito, $H \triangleleft G$ normale, M G . mod.

se $h^i(H, M) = 0$ per $i = 1, \dots, r-1$ allora la succ.

$$0 \rightarrow H^r\left(\frac{G}{H}, M^H\right) \xrightarrow{\text{Incl}} H^r(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} H^r(H, M)$$

è esatta.

(Dim. Se ne)

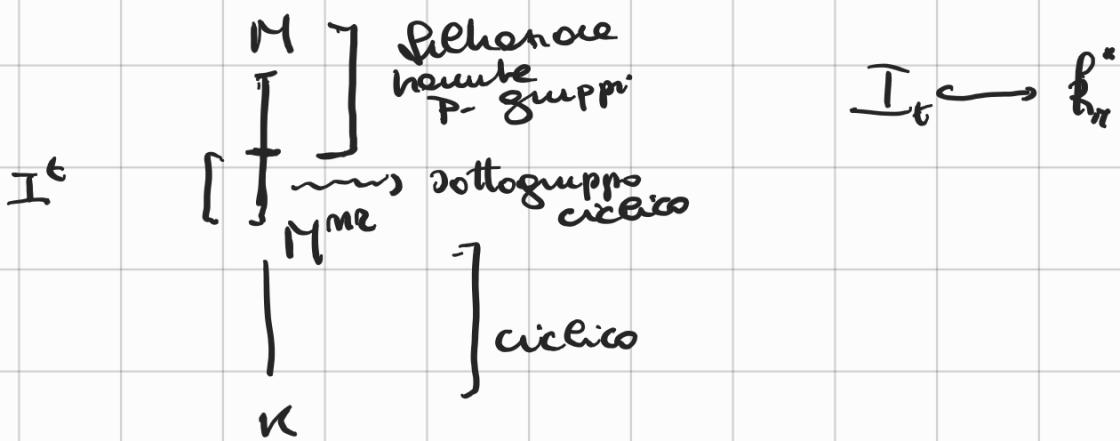
Corollario

Per ogni estensione finita M/K di campi locali

$$|H^2(M/K)| \leq [M:K]$$

Duu.

Il gruppo di Galois di ogni est. finita di campi locali è risolubile:



P gruppi sono risolubili $\Rightarrow \text{Gal}(M/K)$ risolubile
 $(G$ p-gruppo $\Rightarrow Z(G)$ non banale).

\Rightarrow esiste una risoluzione di G con
 Induttivamente:
 gruppi ciclici.

$$0 \rightarrow H^2(L/K) \xrightarrow{\text{Incl}} H^2(M/K) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(M/L)$$

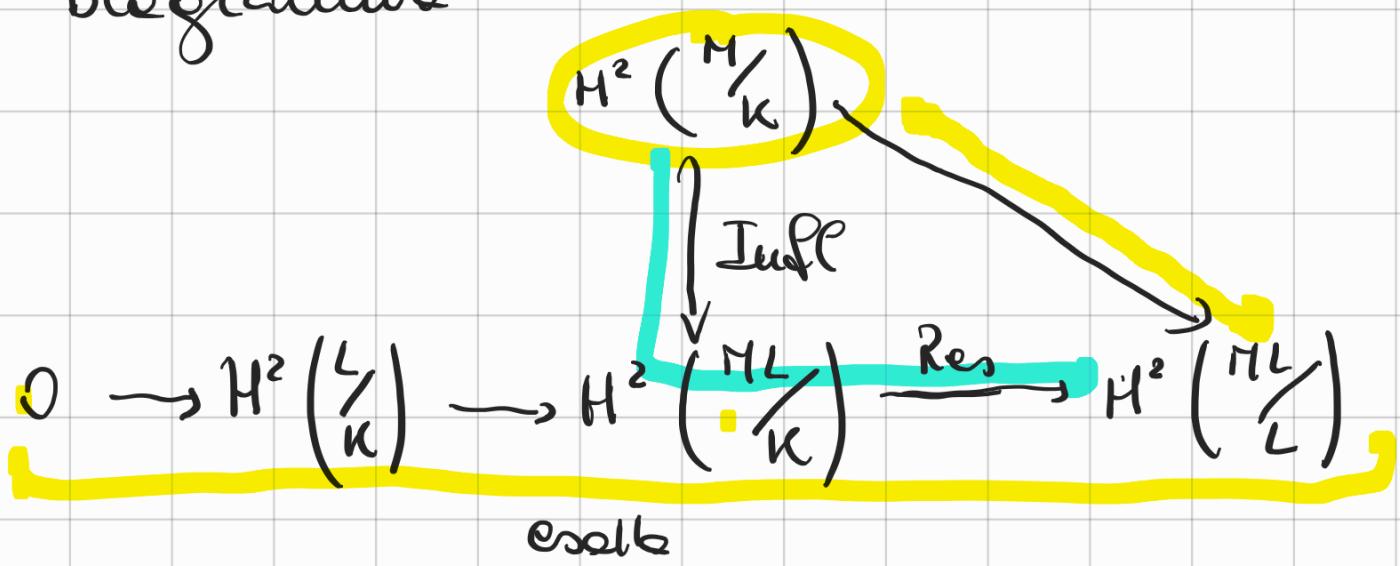
$$\Rightarrow |H^2(M/K)| \leq |H^2(L/K)| \cdot |H^2(M/L)|$$

$$\leq [L:K][M:L] = [M:K]$$

Per dimostrare che $H^2(L/K)$ è ciclico di ordine $[L:K]$ proviamo che contiene un sgp. ciclico di ordine $[L:K]$.

Sia M/K m.r. di grado $[L:K]$

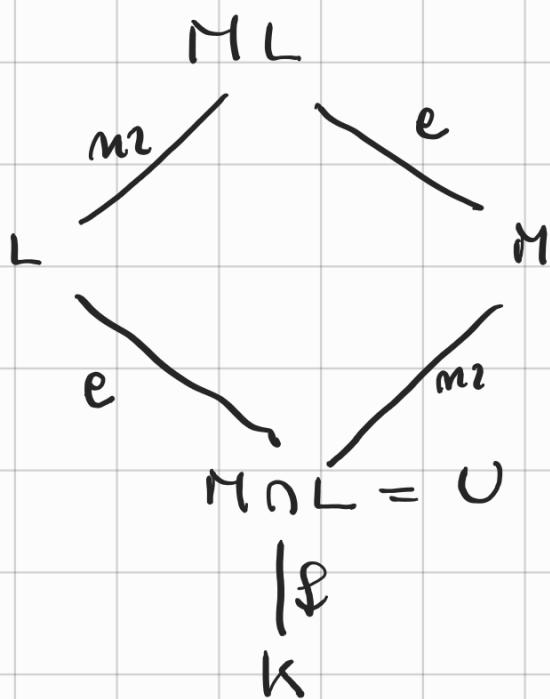
Diagramma



Proviamo che lo spaccio diagonale è nullo.
in questo caso possiamo mandare un generatore di $H^2(M/K)$ in $H^2(ML/K)$
che proviene da un elemento in $H^2(L/K)$
di ordine almeno $[M:K] = [L:K]$.

$$e = e(\frac{L}{K})$$

$$f = f(\frac{L}{K})$$



$$Gel\left(\frac{ML}{M}\right) \simeq Gel\left(\frac{L}{U}\right)$$

$$Gel\left(\frac{ML}{L}\right) \simeq Gel\left(\frac{M}{U}\right) \quad \text{cyclici}$$

Die grammatical

$$H_+^0\left(\frac{M}{K}\right) \xrightarrow{\text{Res}} H^0\left(\frac{M}{U}\right) \rightarrow H_T^0\left(\frac{ML}{L}\right)$$

↓ ↓ ↓

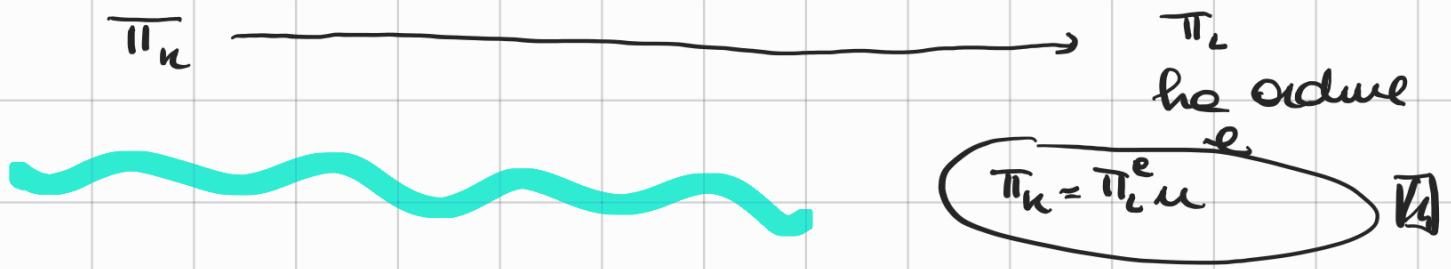
$$H_+^2\left(\frac{M}{K}\right) \xrightarrow{\text{Res}} H_T^2\left(\frac{M}{U}\right) \rightarrow H_T^2\left(\frac{ML}{L}\right)$$

Basta provare che la mappa sopra è nulla

Ma questo è

$$\frac{K^*}{NM^*} \longrightarrow \frac{U^*}{NM^*} \longrightarrow \frac{L^*}{N(ML)^*}$$

↑



Abbiamo quindi provato che

$$H^2\left(\frac{K}{k}\right) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$H^2\left(\frac{k^{(n)}}{k}\right)$$

infatti

$$\textcircled{1} \quad H^2\left(\frac{k^{(n)}}{k}\right) \xrightarrow[\sim]{\text{Inf}} H^2\left(\frac{K}{k}\right) \text{ è infatti}$$

$$\begin{array}{c} || \\ \text{inj.} \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

c'è un $\frac{L}{K}$ galois punto di grado n .

$$\text{im}\left(H^2\left(\frac{L}{K}\right)\right) = \text{im}\left(H^2\left(\frac{M}{K}\right)\right) \text{ in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dove $\frac{M}{K}$ è n.r. di grado $[L: K]$.

Questo vale per ogni M insomorfismo