Fine dim. che $H^2(L/K)$ contiene un sgp. ciclico di ordine $[L:K] = n$

Sia M/K n.r. di grado n

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & LM \arrow[dl, dash, "e"'] \arrow[dr, dash, "e"] & \\
L \arrow[dr, dash, "e"'] & & M \arrow[dl, dash, "e"] \\
 & L\cap M = U = L^{nr} \arrow[d, dash, "f"] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

$e = e(L/K)$
$f = f(L/K)$

$ef = n$

ci si riconducevo a voler dimostrare

$$\begin{tikzcd}
K^\times / NM^\times \arrow[r, "\text{modulo le val.}"] \arrow[d, equal] & L^\times / N((ML)^\times) \arrow[d, equal] \\
\langle \pi_K \rangle \arrow[r] & \langle \pi_L \rangle
\end{tikzcd}$$

è nullo

ciclici di grado n e e rispett.

$\pi_K = \pi_L^e a$, $a \in U_L$ banale nel quoziente

$/\!/$

1

$\mathrm{inv}_K : H^2(\bar{K}/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isom.

I risultati della local CFT

L/K Galois finito di campi locali.

Per ogni estensione intermedia $K \subseteq M \subseteq L$ si ha $H^1(L/M) = 0$ (H90) $H^2(L/M)$ ciclico di ordine $[L:M]$.

Teorema di Tate

Sia G gruppo finito, M G-modulo
Supponiamo che $\forall$ sgp H di G (incluso $H=G$) si abbia $H^1(H,M)=0$ e $H^2(H,M)$ ciclico di ordine $|H|$.
Allora esistono isom.

$$H_T^i(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_T^{i+2}(G,M) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

canonici (una volta fissato un generatore di $H^2(G,M)$).

Applicandolo con $G = Gal(L/K)$, $M = L^\times$
si ottengono isom.

$$H_T^i(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_T^{i+2}(G,L^\times)$$

Per $i=-2$ abbiamo iso canonico

$$\begin{tikzcd}
H_T^{-2}(G,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_T^0(G,L^\times) \\
Gal(L/K)^{ab} \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[r] & K^\times / NL^\times
\end{tikzcd}$$

Risulta che per $K \subseteq L \subseteq M$

$$\begin{tikzcd}
K^*/N M^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Gal}\left(M/K\right)^{ab} \arrow[d] \\
K^*/N L^* \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Gal}\left(L/K\right)^{ab}
\end{tikzcd}$$

(oss. $N_{M/K}(M^*) = N_{L/K}\left(N_{M/L}(M^*)\right) \subseteq N_{L/K}(L^*)$)

Passando al limite si trova la mappa di reciprocità locale

$$\theta_K : K^* \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(K^{ab}/K\right)$$

Oss. TEOREMA DI LIMITAZIONE DELLE NORME.

Segue che ogni sgp. di norme è il gruppo di norme di un'estensione abeliana

$$N_{L/K} L^* = N_{M/K} M^* \quad \text{dove } M \text{ è la}$$

massima sottoest. abeliana di L/K.

Resta da provare il <u>teorema di esistenza</u>: ogni $\overbrace{\text{sgp.}}^{\text{(aperto)}}$ di indice finito in K^* è un sottogruppo di norme.

<u>Fatto</u> K campo locale di car 0 allora per ogni ℓ primo $(K^*)^\ell$ è aperto.

($\Rightarrow$ $(K^\times)^n$ è aperto in $K^\times$ $\forall n$).

$$K^\times = \langle \pi_K \rangle \times k^\times \times (1 + \pi_K \mathcal{O}_K)$$

$\langle \pi_K \rangle \cong \mathbb{Z}$, $\quad k^\times \cong (q-1)$, $\quad 1 + \pi_K \mathcal{O}_K$ pro p-gruppo.

se $\ell \neq p$

$$(K^{\times,\ell}) \cong \ell\mathbb{Z} \times (k^\times)^\ell \times (1+\pi_K \mathcal{O}_K)^{\cancel{\ell}}$$

$\rightsquigarrow$ $1 + \pi_K \mathcal{O}_K \subseteq (K^\times)^\ell$ $\rightsquigarrow$ $(K^\times)^\ell$ aperto.

se $\ell = p$ serve una versione del Lemma di Hensel::

$F \in \mathcal{O}_K[x]$ e supponi che $\exists \alpha$ t.c.

$F(\alpha) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$ e $|F(\alpha)| < |F'(\alpha)|^2$

allora α si solleva a $\tilde{\alpha} \in \mathcal{O}_K$ t.c. $F(\tilde{\alpha}) = 0$.

Prendiamo $\beta = 1 + \pi^k a$ $\quad a \in \mathcal{O}_K$

$F(x) = x^p - \beta$ si ha $F'(x) = p\, x^{p-1}$

$\rightsquigarrow$ $F(1) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}$

$|F(1)| = |\pi^k a| \qquad |F'(1)| = |p|$

per $k \gg 0$ si ha $|F(1)| < |F'(1)|^2$

$\rightsquigarrow$ $\exists \gamma \in \mathcal{O}_K$ $\quad \gamma^p = \beta$

$\rightsquigarrow$ $1 + \pi^k \mathcal{O}_K \subseteq (K^\times)^p$ $\rightsquigarrow$ $(K^\times)^p$ aperto. $\blacksquare$

Teorema di esistenza $U \subseteq K^\times$ (aperto) di indice finito $\Rightarrow$ $\exists\, L/K$ t.c. $U = N_{L/K} L^\times$

Lemma

Sia ℓ primo e sia K campo locale contenente una radice primitiva ℓ-esima di 1.

Allora

$$x \in (K^\times)^\ell \iff x \in N_{L/K} L^\times \text{ per ogni estensione (ciclica) } L/K \text{ di grado } \ell.$$

Dim. Poiché $\mu_\ell \subseteq K$ esiste biezione

$$K^\times/(K^\times)^\ell \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{estensioni cicliche} \\ \text{di grado } \ell\ L/K \end{array} \right\}$$

$$\bar{\alpha} \longmapsto K(\sqrt[\ell]{\alpha})$$

finito $\Rightarrow$ esiste un numero finito di estensioni L/K cicliche di grado ℓ.

$$K^\times/(K^\times)^\ell \simeq \left(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\right)^n \text{ per un certo } n.$$

Sia M il composto di tutte le estensioni cicliche di grado ℓ.

Si ha $\mathrm{Gal}\left(M/K\right) \simeq \left(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\right)^n \simeq K^\times/NM^\times$

$$\underbrace{K^{\times,\ell} \subseteq \underbrace{N_{M/K} M^\times \subseteq K^\times}}$$ e gli indici sono

uguali $\rightsquigarrow$ $K^{\times,\ell} = N_{M/K} M^\times = \bigcap_{\substack{L/K \\ \text{ciclico} \\ \text{di grado } \ell}} N_{L/K} L^\times$. ∎

Osservazione

$N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times$ ha immagine chiusa e nucleo compatto.

- Immagine chiusa: è ap
- $\ker N \subseteq U_L$ è un chiuso in un compatto $\rightsquigarrow$ è compatto.

Corollario: $\bigcap_{L/K \text{ finita}} N_{L/K} L^\times = \{1\}$

Dim. $D_K = \bigcap_{L/K \text{ finita}} N_{L/K} L^\times$

osserviamo che $D_K \subseteq U_K$ (prendi esten. n.r.)

$\Rightarrow$ D_K è chiuso in un compatto $\Rightarrow$ compatto.

inoltre: per il lemma precedente

- $D_K \subseteq K^{\times,\ell}$ per ogni primo ℓ.

Proviamo che D_K è divisibile cioè $\forall x \in D_K$ $\forall m \in \mathbb{N}, m>0$, ($\exists y \in D_K$ t.c. $y^m = x$ (basta provarlo per $m \overset{e}{=}$ primo)

U_K non contiene sgp non banali divisibili: $U_K = k^\times \times (1 + \mathfrak{P}_K)$

$(k^\times)^{q-1} = 1$

$(1 + \mathfrak{P}_K^m \mathcal{O}_K)^p = 1 + \mathfrak{P}^{m+e} \mathcal{O}_K$ $\bigcap (1 + \mathfrak{P}^m) = \{1\}$

Si prova che

$\rightsquigarrow$ D_K è divisibile. $\rightsquigarrow$ $D_K = \{1\}$. $\boxtimes$

Dim. del teorema di esistenza

$U \subseteq K^\times$. $[K^\times : U] < \infty$

Per provare che $U = N_{L/K} L^\times$ per una certa L/K basta provare che $\exists$ L/K t.c. $N_{L/K} L^\times \subseteq U$.

Infatti si avrà

$$\frac{K^\times}{NL^\times} = \mathrm{Gal}(L/K) \qquad \frac{U}{NL^\times} \leq \mathrm{Gal}(L/K)$$

$\frac{U}{NL^\times} \rightsquigarrow \mathrm{Gal}(L/M)$ per una sottoestensione $K \subseteq M \subseteq L$

e risulta $N_{M/K} M^\times = U$

$$\begin{tikzcd}
K^*/NL^* \arrow[r] \arrow[d] & Gal(L'/K) \arrow[d] \\
K^*/NM^* \arrow[r] & Gal(M/K)
\end{tikzcd}$$

$$NM^*/NL^* \longrightarrow Gal(L/M)$$

$\rightsquigarrow U/NL^* \nearrow \quad \rightsquigarrow NM^* = U.$

Supponiamo che $U_K \subseteq U$.
Sia $m\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ l'immagine di U in $K^*/U_K \simeq \mathbb{Z}$. Allora $U = v_K^{-1}(m\mathbb{Z})$.

Sia K_m/K non ramificata di grado m.
allora
$N_{K_m/K}(K_m^*) \leq K^*$ contiene U_K e con immagine $m\mathbb{Z}$ tramite v_K $\rightsquigarrow U = N_{K_m/K}(K_m^*)$

$$K^*/NK_m^* \simeq \mathbb{Z}/v(\,) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Proviamo il caso generale.

Sia $\mathcal{N}$ l'insieme dei gruppi di norme in K^*.

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{1\}.$$

Sia $U \subseteq K^*$ di indice finito.

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} (N \cap U_K) = 1$$

Segue che gli insiemi $(N \cap U_K) \setminus U$ hanno intersezione vuota.

essendo compatti esiste una sottofamiglia finita con intersezione vuota.

$\rightsquigarrow \exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$ finita t.c.

$$\bigcap_{N \in \mathcal{S}} (N \cap U_K) \subseteq U$$

Osserviamo che l'intersezione di due sgp. di norme contiene un sgp. di norme

$(NL_1 \cap NL_2 \supseteq N(L_1 L_2))$

$\rightsquigarrow \exists N_0 \in \mathcal{S}$ t.c. $(N_0 \cap U_K) \subseteq U$.

Allora U contiene

$$\boxed{N_0 \cap (U_K \cdot (N_0 \cap U))} \qquad (*)$$

Infatti $x \in U_K \cdot (N_0 \cap U)$

$x = ab \quad a \in U_K, \; b \in N_0 \cap U$

se $x \in N_0 \Rightarrow a \in N_0 \Rightarrow a \in N_0 \cap U_K \Rightarrow a \in U$

$\Rightarrow ab \in U$.

Ora $N_0 \cap U$ ha indice finito in K^* perché entrambi hanno indice finito.

Quindi $U_K(N_0 \cap U)$ è un sgp di indice finito in K^* e contiene U_K.

$\Rightarrow$ è un sgp di norme N_1

per $(*)$ $\underbrace{N_0 \cap N_1}_{\text{sottogruppi}} \subseteq U$

$\exists$ sgp. di norme $N_2 \subseteq U$. $\blacksquare$