Adèles e idèles

K campo di numeri (globale, $\mathrm{car}(K)=0$)

$M_K = \{$posti di $K\}$ $\qquad M_{K,0} = \{$posti n. a.$\}$

$\mathbb{A}_K$ = adèles di K

= prodotto ristretto dei K_v, $v \in M_K$

rispetto agli $\mathcal{O}_v$, $v \in M_{K,0}$

$\mathbb{I}_K^\times$ = idèles di K

= prodotto ristretto dei $K_v^\times$ $v \in M_K$

rispetto agli $\mathcal{O}_v^\times$, $v \in M_{K,0}$

Norma idelica: $(\alpha)_v \in \mathbb{I}_K^\times$

$$\|(\alpha)_v\| = \prod_{v \in M_K} |\alpha|_v^{d_v} \qquad K^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K$$

Formula del prodotto:

$\alpha \in K^\times$ $\quad \|\alpha\| = 1$

inoltre

K è discreto in $\mathbb{A}_K$, $\mathbb{A}_K / K$ compatto.

$$C_K = \mathbb{I}_K / K^\times \longrightarrow \mathcal{C}\ell(K) \qquad \text{suriettiva}$$

$$(\alpha_v) \longmapsto \prod_{v \in M_0} \mathfrak{P}_v^{v(\alpha_v)}$$

resta suriettiva su $C_K^0 = \{ \overline{(\alpha_v)_v} \mid \|(\alpha)_v\| = 1 \}$

$\downarrow$

compatto.

$\rightsquigarrow$ Finitezza di $\mathcal{C}\ell(K)$ + teorema delle unità.

Supponiamo L/K finita.
$\forall w \in M_L$ $w|v$ per un unico $v \in M_K$
e c'è un' immersione $K_v \hookrightarrow L_w$
e L_w/K_v finita $[L_w : K_v] \leq [L : K]$.
Quindi possiamo definire immersione

$$\mathbb{A}_K \hookrightarrow \mathbb{A}_L$$

$$\mathbb{I}_K \hookrightarrow \mathbb{I}_L$$

$$(\alpha_v)_v \rightsquigarrow (\beta_w)_w \quad \text{dove } \beta_w = \alpha_v \text{ se } w|v$$

manda

$$K^\times \hookrightarrow L^\times$$

$\rightsquigarrow$ induce immersione $C_K \hookrightarrow C_L$.
Se L/K è di Galois e $G = Gal(L/K)$
allora G agisce naturalmente su $\mathbb{A}_L, \mathbb{I}_L$.
Infatti: se $\sigma \in G$ $v \in M_K$ $w \in M_L$
σ induce un isom. K_v - lineare

$$L_w \longrightarrow L_{\sigma(w)}$$

Quindi

$$\sigma((\alpha_v)_v) \longrightarrow (\sigma(\alpha_v))_{\sigma(v)}$$

Questa azione è compatibile con l'immersione
$L \hookrightarrow \mathbb{A}_L$
Quindi induce automorfismo di C_L.

NB. Si $\mathbb{A}_L = \mathbb{A}_K \otimes_K L$ (isom. di L-algebre).
con G che agisce sulle L-componente).

Si possono definire su $\mathbb{A}_L$ traccia e norma

$$\left.\begin{aligned} Tr_{\mathbb{A}_L/\mathbb{A}_K}(x) &= \sum_\sigma x^\sigma \\ N_{\mathbb{A}_L/\mathbb{A}_K}(x) &= \prod_\sigma x^\sigma \end{aligned}\right\} \in \mathbb{A}_K$$

In componenti si ha se $v \in M_K$

$$\left(Tr_{\mathbb{A}_L/\mathbb{A}_K}(x)\right)_v = \sum_{\omega | v} Tr_{L_\omega/K_v}(x_\omega)$$

$$\left(N_{\mathbb{A}_L/\mathbb{A}_K}(x)\right)_v = \prod_{\omega | v} N_{L_\omega/K_v}(x_\omega).$$

In particolare la norma induce una funzione

$$N_{L/K} : C_L \longrightarrow C_K$$

L/K galois, $G = Gal(L/K)$
l'azione di G su $\mathbb{A}_L$ e su $\mathbb{I}_L$ fissa
$\mathbb{A}_K$ e $\mathbb{I}_K$ risp.
e inoltre G agisce su C_L.

Prop. $C_K = C_L^G$.

Dim

Succ. esatta

$$1 \longrightarrow L^\times \to \mathbb{I}_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 1$$

succ. esatta lunga in coom.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & L^{\times,G} & \longrightarrow & \mathbb{I}_L^G & \longrightarrow & C_L^G & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, L^\times) \\ & & \| & & & & \| & & \| \\ 1 & \to & K^\times & \longrightarrow & \mathbb{I}_K & \longrightarrow & C_K & \longrightarrow & 1 \quad (\text{H90}) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $H^0(G, C_L) = C_K$.

$\forall v$ esiste mappa di reciprocità locale

$$\Phi_{L_w/K_v}: K_v^\times \longrightarrow Gal\left(L_w/K_v\right)^{ab}$$

LEGGE DI RECIPROCITÀ GLOBALE (abeliana)

Teorema 1

Esiste un (unico) omo canonico

$$\Phi_K : C_K \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right)$$

tale che

(A) Φ_K induce per ogni est. finita L/K un isomorfismo

$$\Phi_{L/K} : C_K / N_{L/K} C_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\left(L^{ab}/K \right)$$

(B) $\forall v \in M_K$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
(1 \dots \alpha \dots) & \mathbb{I}_K \arrow[r] & C_K \arrow[r, "\Phi_K"] & \mathrm{Gal}\left(K^{ab}/K\right) \\
\alpha \arrow[u, dashed, mapsto] & K_v \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\Phi_{K_v}"] & & \mathrm{Gal}\left(K_v^{ab}/K_v\right) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K_v^{ab} \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}\left(K_v^{ab}/K_v\right)"] \\
K^{ab} \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & K_v \\
K \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

commuta.

Teorema 2 (Teorema di esistenza)

Per ogni campo di numeri K e ogni sgp H di C_K aperto e di indice finito, esiste un' estensione finita (abeliana) L/K t.c. $H = N_{L/K} C_L$.

Nota: reciprocità locale nel caso archimedeo

Se v archimedeo, $K_v = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

se $K_v = \mathbb{R}$ $\quad K_v^{ab} = \mathbb{C}$

$$\Phi_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^{\times} \longrightarrow Gal\left(\mathbb{C}/\mathbb{R}\right) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Phi_{\mathbb{R}}(\alpha) = \bar{0} \quad \text{se} \quad \alpha > 0$$
$$= \bar{1} \quad \text{se} \quad \alpha < 0$$

se $K_v = \mathbb{C} \rightsquigarrow K_v^{ab} = \mathbb{C}$ $\quad Gal\left(\mathbb{C}/\mathbb{C}\right) = (1)$.

Costruzione di Φ_K via le mappe locali

$\bar{\alpha} = (\alpha_v)_v \in I_K$ $\qquad L/K$ est. finita, ab.

no $w \in M_L$ $\quad w | v$ $\quad v \in M_K$

$$\underbrace{\Phi_{L_w/K_v}}_{\text{dipende solo da } v} : K_v^{\times} \longrightarrow \underbrace{Gal\left(L_w/K_v\right)}_{=} \hookrightarrow Gal\left(L/K\right)$$

gruppo di decomposizione a w

$\rightarrow$ dipende solo da v

G_v

(perché è l'estensione abeliana)

<u>Oss.</u> se v non ramifica in L e $\alpha \in \mathcal{O}_v^*$ allora sappiamo che $\Phi_{L_w/K_v}(\alpha) = 1$.

Quindi è ben definita la mappa

$$\Phi_{L/K}: I_K \longrightarrow Gal\left(L/K\right)$$
$$(\alpha_v)_v \longmapsto \prod_v \Phi_{L_w/K_v}(\alpha_v)$$

dove si è scelto per ogni v un posto $w | v$.

infatti $\hookrightarrow$ è un prodotto finito.
si ha
- $\tilde{\Phi}_K$ continua (prodotto di mappe continue il cui nucleo contiene $\prod_{v \text{ n.r. in } L} \mathcal{O}_v^\times$ cioè un aperto in $\mathbb{I}_K$)
- e il nucleo contiene $N_{L/K}(\mathbb{I}_L)$.

se $K \subseteq L \subseteq L'$ si ha

$$\tilde{\Phi}_{L'/K}(\alpha)\big|_L = \tilde{\Phi}_{L/K}(\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{I}_K$$

passando al lim. proiettivo otteniamo

$$\Phi_K : \mathbb{I}_K \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right).$$

Ci si "riduce" al teorema seguente.

<u>Teorema</u>

① $\tilde{\Phi}_K(K^*) = 1$ quindi induce

$$\Phi_K : C_K \longrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right)$$

② Per ogni L/K abeliana finita Φ_K induce isom.

$$\Phi_{L/K} : C_K/NC_L \longrightarrow Gal\left(L/K\right).$$

+ teorema di esistenza.

Se $N \subseteq C_K$ sgp aperto di indice finito in C_K allora $\exists\ L/K$ abeliano t.c. $N = N_{L/K} C_L$

L si dice **class field** di K appartenente a N

<u>Corollario</u> $\exists$ biezione

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{estensioni finite} \\ \text{abeliane } L/K \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sgp aperti di indice finito} \\ \text{di } C_K \end{array} \right\}$$

$$L \longmapsto N_{L/K} C_L$$

$$L \text{ class field appartenente a } N \longleftarrow N$$

t.c.

$$L_1 \subseteq L_2 \rightsquigarrow N(C_{L_1}) \supseteq N(C_{L_2})$$

$$N(C_{L_1 L_2}) = N(C_{L_1}) \cap N(C_{L_2})$$

$$N(C_{L_1 \cap L_2}) = N(C_{L_1}) \cdot N(C_{L_2}).$$

Φ_K è suriettiva se $\mathrm{car}(K) = 0$

e $\ker \Phi_K = \boxed{\overline{K^* \cdot \prod_{v | \infty} K_v^+}}$ ↳ componente connessa di 1.

Schema della dimostrazione

Se L/K finita Galois, $C_L = I_L / L^*$ ha lo stesso ruolo nel caso globale che il gruppo moltiplicativo $L^\times$ aveva nel caso locale.

$$
\begin{array}{ccc}
\Phi_{L/K} : \dfrac{C_K}{NC_L} & \longrightarrow & Gal\left(L/K\right)^{ab} \\
\| & & \| \\
H^0_T(G, C_L) & \dashrightarrow & H^{-2}_T(G, \mathbb{Z})
\end{array}
$$

$$
\text{''}\left(M^G / NM\right)
$$

Teorema di Tate: G gruppo M G-modulo

se $H^1(G, M) = 0$

e $H^2(H, M)$ ciclico di ordine $|H|$ $\forall H \leq G$

allora $\Rightarrow \exists$ iso canonico

$$H^r_T(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{r+2}_T(G, M) \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

Per applicare Tate occorre provare che

$\forall$ L/K galois con $G = Gal(L/K)$

(a) $H^1(G, C_L) = 0$

(b) $H^2(G, C_L)$ ciclico di ordine $[L:K]$

con generatore canonico $u_{L/K}$

(c) se $K \leq L \leq E$ si ha $Res(u_{E/K}) = u_{E/L}$

$$\rightsquigarrow H_T^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_T^0(G, C_L)$$

Per fare questo

① Si esprime la coomologia degli idèles in termini di quella dei campi locali:

- $H^0(G, \mathbb{I}_L) = \mathbb{I}_K$
  $\forall r$
- $H_T^r(G, \mathbb{I}_L) = \bigoplus_v H_T^2(G_w, L_w^*)$

dove $G_w = Gal\left(L_w/K_v\right)$ e si è scelto un w sopra ogni v

Gruppo di Brauer $\quad Br(K) = H^2(Gal(\bar{K}/K), \bar{K}^*)$

C'è una succ. esatta

$$0 \longrightarrow Br(K) \longrightarrow \bigoplus_v Br(K_v) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$Br(K_v) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Dice che le algebre centrali semplici globali sono completamente determinate dalle loro localizzazioni.

Per es. sulla 2-torsione

$$0 \longrightarrow Br(K)[2] \longrightarrow \bigoplus_v Br(K_v)[2] \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

$B_v \longrightarrow 0$ se $B_v \simeq M_2(K_v)$

$B_v \longrightarrow 1$ se B_v non è spezz.

Il numero di v
t.c. B_v è non spezz. per una B globale
deve essere (finito e) **pari**.