

Modulo $m: M_K \rightarrow \mathbb{N}$

"ideale generalizzato"

$$K_{m,s} = \left\{ a \in K^* \mid \begin{array}{l} v(a-1) \geq m(v) \quad \forall v \in M_0 \\ v(a) \geq 0 \quad \forall v \text{ reale } v \mid m \end{array} \right\}$$

$S(m)$ supporto di m

Ray class group associato a m :

$$\mathcal{C}_m = \frac{\mathcal{I}_{S(m)}}{K_{m,s}}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_m \longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ \uparrow \\ \text{funto.} \end{array}$$

$$S = M_0 \cup \left\{ v \mid \frac{v}{m} \text{ intero} \right\}$$

$\forall L/K$ abeliana le mappe di Artin

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{L/K} : \mathcal{I}^S & \longrightarrow & \text{Gal}(L/K) \\ \mathbb{F} & \longmapsto & \text{Frob}_{\mathbb{F}} \end{array}$$

ammette un modulo m t.c. $S(m) \cong S$

cioè \mathbb{F} sotto per \mathcal{C}_m

(cioè il nucleo contiene $K_{m,s}$ cioè è

un **sottogruppo di congruenza**)

Il teorema di esistenza afferma che

per ogni sgp di congruenza H (di \mathbb{F}_K) \mathbb{F}

est. ab. \mathbb{F} sotto L/K m.r. fuori da $S(m)$ e

$$\text{l.c. } H = i(K_{m,1}) N_{L/K}(\mathcal{I}_L^m)$$

Il minimo modulo m per cui questo accade.

si dice **conduttore dell'estensione**.

(Analogia con il caso \mathbb{Q}).

Esempio

$$m = 1$$

Il ray class group associato è

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(K)$$

a cui è associato il ray class field L_m ,
 detto in questo caso **campo di Hilbert di K** ,
 per def. è la max estensione di K m.r.
 a tutti i primi, inclusi i primi reali (cioè
 i prim' reali di K restano reali in L)

- Il corpo di classe di Hilbert di \mathbb{Q} è \mathbb{Q} .

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

$$H = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-5})$$

In

$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ ramificano 2, 5

ma solo 2 ramifica in $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$

5 ramifica in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$

$\leadsto H/K$ è non ramificata.

Teorema dell'ideale principale

Poiché \mathcal{O}_K è finito, \exists un'estensione finita L/K in cui tutti gli ideali di K diventano principali

$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ classi di ideali

$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$

$$\mathfrak{a}_i = (\alpha_i)$$

$$L = K(\sqrt[n_1]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n_r]{\alpha_r}, \mu_n)$$

Il corpo di Hilbert di K è la minima estensione di K in cui gli ideali di K diventano principali.

Teorema di densità di Chebotarev

Dichied. dato m , e a t.c. $(a, m) = 1$ esistono infiniti primi $p \equiv a \pmod{m}$.

L/K abeliana

$\Psi_{L/K}$ induce un omom. $\mathcal{O}_m \rightarrow \text{Gal}(L/K)$

per qualche modulo m

$$\gamma^{S(m)} \longrightarrow \text{Gal}(L/K)$$

I primi sono equidistribuiti nelle classi di \mathcal{C}_m

\leadsto per ogni $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ esistono infiniti
primi \mathfrak{p} di \mathcal{O}_K che non si ramificano in
 L e t.c. $\sigma = \text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})$

Teorema di Chebotarev

Sia L/K finita di campi di numeri

$$G = \text{Gal}(L/K)$$

Sia C una classe di coniugio in G .

(un elem. se G abeliano).

L'insieme

$$X_C = \left\{ \mathfrak{p} \text{ primo di } \mathcal{O}_K \mid \exists \sigma \in \mathcal{O}_K \text{ } \sigma | \mathfrak{p} \text{ e } \text{Frob}_\sigma \in C \right\}$$

ha densità $\frac{|C|}{|G|}$ nell'insieme degli

ideali primi di K .

($|C|=1$ se G abeliano)

Corollario

Se un polinomio $P(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ si spezza
in fattori lineari mod \mathfrak{p} per tutti i primi

\mathbb{P} di \mathbb{Q}_K solo un numero finito, allora
 si spezza in fattori lineari in K .

Duv.

L campo di spezzam. di $f(x)$.

$f(x)$ si spezza in fatt. lineari mod $\mathbb{P} \Leftrightarrow$

Frobenius è banale $\forall \mathbb{P} | \mathbb{P}$.

$\Rightarrow L/K$ banale. \square

Caso non abeliano

CFT

- locale

$$\begin{array}{ccc} K^* & \longrightarrow & \text{Gal}\left(\frac{K^{ab}}{K}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{K^*}{NL^*} & \xrightarrow{\sim} & \text{Gal}\left(\frac{L}{K}\right) \end{array} \quad \forall \text{ est. finite ab. } \frac{L}{K}$$

- globale

$$\begin{array}{ccc} C_K & \longrightarrow & \text{Gal}\left(\frac{K^{ab}}{K}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{C_K}{NC_L} & \xrightarrow{\sim} & \text{Gal}\left(\frac{L}{K}\right) \end{array} \quad \forall \text{ est. finite ab. } \frac{L}{K}$$

ma per il caso non ab.

K ma $G(K)$ non ab. \rightarrow sottocorpo

con mappa $G(K) \longrightarrow \text{Gal}\left(\frac{\bar{K}}{K}\right)$

in modo t.c. $\forall L/k$ finito.

$$\frac{G(k)}{N_{L/k}(G(L))} \simeq \text{Gal}\left(\frac{L}{k}\right)$$

normale.

Situazione più chiara considerando i gruppi duali.

G gruppo loc. compatto.

Si può considerare l'insieme dei caratteri
 $\widehat{G} = \{ \text{omo continui } G \rightarrow S^1 \}$ GRUPPO DUALE

Se G abeliano esiste iso

$$\widehat{\widehat{G}} \simeq G \quad (\text{Pontryagin}).$$

Nel caso abeliano

$$\omega: C_k \rightarrow S^1 \quad \begin{array}{l} \text{caratteri} \\ \text{di Hecke} \\ \text{o grossencharakteri} \end{array}$$

$$\chi: \text{Gal}\left(\frac{k^{ab}}{k}\right) \rightarrow S^1$$

\hookrightarrow rappres 1-dimensionali
di $\text{Gal}\left(\frac{k^{ab}}{k}\right)$ rappresentazioni
Galoisiane

Se $\chi: \text{Gal}\left(\frac{k^{ab}}{k}\right) \rightarrow S^1$, componendo χ

$$\text{con } \phi_{L/k}: C_k \rightarrow \text{Gal}\left(\frac{k^{ab}}{k}\right)$$

otteniamo $\omega = \chi \circ \phi_{L/k}$ grossencharacter.

Mappe unielive

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rappres.} \\ \text{1-dim. di } G_K \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{caratteri di} \\ \text{Hecke di} \\ C_K \end{array} \right\}$$

$\text{Gal}(\bar{K}/K)$

L'immagine è dato dai caratteri di Hecke di ordine finito (cioè sottoinsieme per un gruppo finito)

Oss. S^1 non ha sottogruppi piccoli
 $w: \text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow S^1$

Sottinsieme per un quoziente finito: se U aperto in S^1 non contiene sgp , allora $w^{-1}(U)$ aperto di G_K , quindi contiene un sgp aperto $H = \text{Gal}(\bar{K}/L)$ con L/K finito $\implies w(H) = 1 \implies w$ ha immagine finita.

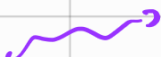
(Oss. possono esistere caratteri di $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow L^\times$ di ordine infinito se L/\mathbb{Q}_p è per es. un'estensione finita: per es. il **carattere ciclotomico**)

$$w: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

che descrive l'azione di $G_{\mathbb{Q}}$ su $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$.

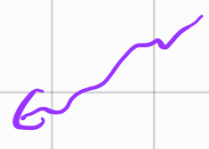
Domande: $F = \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p, L/\mathbb{Q}_p$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{analogo} \\ \text{dei caratteri} \\ \text{di } C_K \text{ di} \\ \text{ordine finito} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rappres. n-dim.} \\ G_K \rightarrow \text{GL}_n(F) \end{array} \right\}$$



$\left. \begin{array}{l} \text{rappresentazioni} \\ \text{automorfe di} \\ \text{GL}_n(\mathbb{A}_K) \\ \text{banale su} \\ \text{GL}_n(K) \end{array} \right\}$

(CONGETTURA DI LANGLANDS GLOBALE)



Rappres. automorfe di un gruppo locale compatto G e una rappres. irriducibile di G su $L^2(G)$
 (funzioni square-integrable $G \rightarrow \mathbb{C}$ dove G agisce per moltiplicazione a dx

$g, f \mapsto f(\cdot g)$ Rappres. regolare dx di G .

si decompone in rappres. irriducibili
 una rappres. automorfe di G .

Si realizza su spazi di forme automorfe.
 funzioni $GL_n(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ modulari.

Π rappresentazione automorfe una

$\Pi = \bigotimes_v \Pi_v$ Π_v rappres. di $GL_n(K_v)$

Congettura di Langlands locale

esiste corrisp. biunivoca

$\left. \begin{array}{l} \text{classi di isom.} \\ \text{di rappres. irrid.} \\ \text{"ammissibili" di } GL_n(K_v) \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{classi di isom.} \\ \text{di rappres. m. dim.} \\ \text{soluzione di } \text{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \end{array} \right\}$

↑
 un processo su cui Frobenius agisce in modo semi-semplice.

Dimostrata da Kutzko nel 1980

Duoshote nel 2001 per n arbitrario
(Hauis-Taylor)

La corrispondenza è espressa in termini
di **Funzioni L**.

A ogni oggetto \rightsquigarrow rappres. autom. di $GL_n(\mathbb{A}_K)$
 \rightsquigarrow rappres. di G_K (K locale o globale)

è possibile associare una Funzione L

$$L(\pi, s) \quad L(g, s) \quad L(\pi_0, s)$$

s variabile complessa

- $L(\pi, \cdot)$, $L(g, \cdot)$ meromorfe

- soddisfa un'eq. funzionale

- si decompone in un prodotto di Eulero

$$L(\pi, s) = \prod_{\text{poli } \rho_k} \left(\frac{1}{p} \right)$$

Langlands

π di $GL_n(\mathbb{A}) \rightsquigarrow g: G_K \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$

$$L(\pi, s) \rightsquigarrow L(g, s)$$

\rightsquigarrow