• COOMOLOGIA DI DE RHAM DEL NASTRO DI MOBIUS (APERTO)

SIA $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\}$.

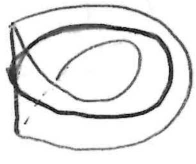
IL NASTRO DI MOBIUS APERTO È IL QUOZIENTE

$M = R/\sim$ DOVE $(0,y) \sim (1,-y)$

(SI PUÒ DEFINIRE ANCHE A PARTIRE DA $I \times \mathbb{R}$ CON $I = [0,1]$ E $\sim$ DATA DA $(0,y) \sim (1,-y)$)

M È UNA VARIETÀ NON ORIENTABILE.

PER CALCOLARE LA COOMOLOGIA DI DE RHAM DI M POSSIAMO OSSERVARE CHE IL CERCHIO CENTRALE SU M È UN RETRATTO DI DEFORMAZIONE DI M:



QUINDI M HA LA COOMOLOGIA DI S^1

$$H^k(M) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0,1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

ESSENDO M CONNESSA NON ORIENTABILE SAPEVAMO GIÀ CHE $H^0(M) = \mathbb{R}$ E $H^2(M) = 0$.

• SI PUÒ ARRIVARE ALLO STESSO RISULTATO UTILIZZANDO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS

- CALCOLIAMO ORA LA COOMOLOGIA A SUPPORTO COMPATTO DI M. UTILIZZIAMO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS A SUPPORTO COMPATTO

SIANO U, V ~~disgiunti~~ APERTI IN M TALI CHE $U \cup V = M$ E $U \cap V = W_1 \sqcup W_2$ DISGIUNTI

CON U, V DIFFEOMORFI A DISCHI DI $\mathbb{R}^2$

E W_1, W_2 " " " " (*) (VEDI PAG. 4

QUINDI $H_c^k(U) \cong H_c^k(V) \cong H_c^k(W_1) \cong H_c^k(W_2) \cong$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$

E $H_c^k(U \cap V) \cong H_c^k(W_1 \sqcup W_2) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & k=2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$

APPLICHIAMO ORA LA SUCCESSIONE ESATTA LUNGA DI MAYER-VIETORIS A SUPPORTO COMPATTO:

$$\ldots \to H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(M) \to$$

$$\to H_c^{k+1}(U \cap V) \ldots$$

$\boxed{k=0}$ $0 \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_c^0(U)} \oplus \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_c^0(V)} \to H_c^0(M) \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_c^1(U \cap V)} \to$

$\Rightarrow = 0$

PER IL RESTO:

$$0 \to H^1_c(M) \xrightarrow{\delta} \underbrace{H^2_c(U\cap V)}_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} \xrightarrow{\alpha} \underbrace{H^2_c(U)\oplus H^2_c(V)}_{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} \xrightarrow{\beta}$$

$$\to H^2_c(M) \to 0$$

DALLA DUALITÀ DI POINCARÉ SO CHE $H^2_c(M)=0$

QUINDI ANCHE $H^1_c(M)=0$.

NON VOLENDO USARE LA DUALITÀ DI POINCARÉ, SI PUÒ AD ESEMPIO DIMOSTRARE DIRETTAMENTE CHE LA MAPPA α È UN ISOMORFISMO (SI DIM. USANDO LA DEFINIZIONE DELLA MAPPA α, CHE I GENERATORI DI $H^2_c(U\cap V)$ VANNO IN ELEMENTI NON NULLI DI $H^2_c(U)\oplus H^2_c(V)$).

QUINDI $\mathrm{Im}\,\delta = \ker\alpha = 0 \Rightarrow H^1_c(M)=0$ E

$\ker\beta = \mathrm{Im}\,\alpha = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$

$\Rightarrow H^2_c(M)=0$

OSS. IL NASTRO DI MOBIUS USUALE È UNA VARIETÀ CON BORDO. IL CERCHIO CENTRALE È UN SUO RETRATTO DI DEFORMAZIONE E QUINDI LA SUA COOMOLOGIA DI DE RHAM È QUELLA DI S^1

OSS.

LA COOMOLOGIA DI DE RHAM SI DEFINISCE ~~[illegible]~~ NELLE VARIETÀ CON BORDO ~~[illegible]~~ NELLO STESSO MODO IN CUI L'ABBIAMO DEFINITA ~~NELLE~~ PER LE VARIETÀ SENZA BORDO.

CAI GLI STESSI APERTI SI POSSONO UTILIZZARE PER CALCOLARE $H^k(M)$ UTILIZZANDO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS. USUALE

INOLTRE L'INCLUSIONE

$$\mathrm{INT}(M) \hookrightarrow M \qquad (\mathrm{INT}(M) = M \setminus \partial M)$$

È UNA OMOTOPIA QUINDI INT(M) E M HANNO LA STESSA COOMOLOGIA DI DE RHAM.

(VEDI THM. 8.26 DI LEE "INTRODUCTION TO SMOOTH MANIFOLDS")