GRADO DI UNA MAPPA PROPRIA

VOGLIAMO DEFINIRE IL GRADO DI UNA MAPPA C^∞ PROPRIA TRA DUE VARIETÀ DELLA STESSA DIMENSIONE.

SIANO M, N VARIETÀ DIFFERENZIABILI ORIENTABILI, CONNESSE CON

$$\dim M = \dim N = n$$

SAPPIAMO CHE

$$H^n_c(M) \cong \mathbb{R} = \langle \omega_M \rangle$$

$$H^n_c(M) \cong \mathbb{R} = \langle \omega_N \rangle$$

COME CONSEGUENZA DELLA DUALITÀ DI POINCARÉ.

SIA $f : M \longrightarrow N$ PROPRIA C^∞.

È BEN DEFINITO IL PULL-BACK

$$f^* : H^n_c(N) \longrightarrow H^n_c(M)$$

$$[\omega_N] \longrightarrow f^*[\omega_N] = \lambda[\omega_M]$$

CON $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>DEF</u> IL GRADO DI f, $\deg f$ È

$$\deg f = \lambda$$

(*) RIFERIMENTI: BOTT-TU "DIFFERENTIAL FORMS IN ALGEBRAIC TOPOLOGY"

LEE "INTRODUCTION TO SMOOTH MANIFOLDS" II EDIZ.

VOGLIAMO DIM. CHE λ È UN NUMERO INTERO.

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE

$$\int_M f^*\omega_N = \deg(f)\int_N \omega_N$$

E QUINDI $$\int_M f^*\omega = \deg(f)\int_N \omega \quad \forall \omega \in \Omega^n_c(N$$

<u>PROP.</u> $\lambda \in \mathbb{Z}$

DIMOSTRIAMOLO PRIMA PER $M = N = \mathbb{R}^n$

RICORDIAMO LE SEGUENTI

<u>DEF</u> • $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ C^∞, $p \in \mathbb{R}^m$ SI DICE <u>PUNTO CRITICO</u> PER f SE

$$df_p : T_p(\mathbb{R}^m) \to T_{f(p)}(\mathbb{R}^n)$$ NON È SURIETTIVO.

• SE $p \in \mathbb{R}^n$ È UN PUNTO CRITICO, $q = f(p)$ SI DICE <u>VALORE CRITICO</u>

• $q \in \mathbb{R}^n$ È UN VALORE REGOLARE SE q NON È UN VALORE CRITICO.

OSS ~~...~~ TUTTI I PUNTI $q \in \mathbb{R}^n$ T.C.

$q \notin \operatorname{Im} f$ SONO VALORI REGOLARI

CIOÈ PUÒ SUCCEDERE CHE $f^{-1}(q) = \emptyset$

~~TEOREMA DI SARD~~ TEOREMA DI SARD (PER $\mathbb{R}^n$)

L'INSIEME DEI VALORI CRITICI DI f È UN INSIEME DI MISURA NULLA IN $\mathbb{R}^n$, CIOÈ $\forall \varepsilon$ PUÒ ESSERE RICOPERTO DA CUBI IL CUI VOLUME TOTALE SIA $< \varepsilon$.

PROP. SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UNA MAPPA PROPRIA. SE f NON È SURIETTIVA ALLORA $\deg f = 0$.

DIM L'IMMAGINE DI UNA MAPPA PROPRIA È CHIUSA (VERO PER OGNI SP. TOP. DI HAUSDORFF LOCALMENTE COMPATTO)

$\Rightarrow$ SE $q \notin \operatorname{Im} f$ ESISTE UN INTORNO U DI q T.C. $U \cap \operatorname{Im} f = \emptyset$. SIA ORA α UNA n-FORMA A SUPPORTO COMPATTO CONTENUTO IN U $\Rightarrow f^* \alpha \equiv 0$

$\Rightarrow \deg f = 0 \in \mathbb{Z}$

POSSIAMO RIDURCI ALLORA A DIM. CHE $\deg f \in \mathbb{Z}$ DOVE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ PROPRIA E SURIETTIVA C^∞,

SIA $q \in \mathbb{R}^n$ UN VALORE REGOLARE PER f (LO SONO QUASI TUTTI PER IL TEOREMA DI SARD). PER IPOTESI $f^{-1}(q) \neq \emptyset$

df_p $(p \in f^{-1}(q))$ È SURIETTIVO $\Leftrightarrow$ È UN ISOMORFISMO(*). QUINDI PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, INTORNO A OGNI PUNTO $p \in f^{-1}(q)$, f È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE $\Rightarrow$ L'INSIEME $f^{-1}(q)$ È UN INSIEME DI PUNTI ISOLATI. f È PROPRIA E q È UN COMPATTO $\Rightarrow$ $f^{-1}(q)$ È UN INSIEME FINITO $\{p_1, \dots, p_r\}$. SIA ORA $\alpha \in H^n_c(\mathbb{R}^n)$ UN GENERATORE CON SUPPORTO COMPATTO LOCALIZZATO IN UN INTORNO DI q. SEGUE CHE $f^*\alpha$ È UNA n-FORMA IL CUI SUPPORTO È LOCALIZZATO IN INTORNI DEI PUNTI $\{p_1, \dots, p_r\}$:

$U_{p_1}, \dots, U_{p_r}$

(*) $df_p : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cong}{T_p(\mathbb{R}^n)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cong}{T_q(\mathbb{R}^n)}}$

RICORDIAMO CHE UN DIFFEOMORFISMO PRESERVA L'INTEGRALE A MENO DEL SEGNO (A SECONDA CHE PRESERVI O MENO L'ORIENTAZIONE). QUINDI

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \int_{U_{p_i}} f^*\alpha\Big|_{U_{p_i}} = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\substack{f(U_{p_i}) \\ \| \\ U \ni q}} \alpha$$

E $\mathrm{supp}\,\alpha \subseteq U$

$$= \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm 1$$

↳ SCELGO α T.C. $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 1$

QUINDI $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \deg(f) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \alpha}_{=1} = \sum_{f^{-1}(q)} \pm 1$

$\Rightarrow \deg(f) \in \mathbb{Z}$.

OSS IN PARTICOLARE, DA QUESTO SEGUE CHE IL NUMERO DEI PUNTI CONTATI CON MOLTEPLICITÀ ± 1 NELLA CONTROIMMAGINE DI OGNI VALORE REGOLARE *È LO STESSO* PER OGNI VALORE REGOLARE ED È UGUALE A $\deg(f)$.

NEL CASO $f: M \to N$ LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA:

• <u>TEOREMA DI SARD</u> L'INSIEME DEI VALORI CRITICI DI UNA MAPPA C^∞ $f: M \to N$ HA MISURA NULLA.

• <u>DEF</u> $S \subseteq M$ SOTTOINSIEME HA MISURA NULLA SE ESISTE UN RICOPRIMENTO NUMERABILE DI APERTI COORDINATI U_i T.C. $\varphi_i(S \cap U_i)$ HA MISURA NULLA IN $\mathbb{R}^n$

$(n = \dim M)$

• SE $f: M \to N$ NON È SURIETTIVA, $\deg f =$

(

• UNA MAPPA PROPRIA (CONTINUA) TRA VARIETÀ TOPOLOGICHE È CHIUSA (VEDI AD ESEMPIO (*))

• L'APERTO $U \ni q$ E GLI APERTI $U_i \ni p_i$ POSSONO ESSERE SCELTI COME DOMINI DI CARTE ORIENTATE (U, φ), (U_i, φ_i) E CON

CON $U_i \cap U_j = \emptyset$

(i) $f: U_i \to U$ DIFFEO. LOCALE

(ii) $f^{-1}(U) = \bigcup U_i$.

$\square$

(*) LEE "INTRODUCTION TO SMOOTH MANIFOLDS" THEOREM A.57 (SECOND EDITION)

$\rightsquigarrow \dim M = \dim N$

- SE M, N SONO VARIETÀ COMPLESSE CONNESSE E f È OLOMORFA (PROPRIA)

$$\deg f = \# f^{-1}(q) \qquad q \text{ VALORE REGOLARE}$$

INFATTI LE VARIETÀ COMPLESSE SONO ORIENTABILI E LE MAPPE OLOMORFE PRESERVANO L'ORIENTAZIONE

-