

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 3 luglio 2024

Tempo a disposizione: 3 ore

*Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU:*

*esercizi 1-4, tempo 2 ore e mezza; barrare qua:*  $\square$

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME ..... NOME .....

**Esercizio 1.** (7 punti) Si consideri l'insieme  $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}$  e l'insieme  $\mathcal{T}$  di sottoinsiemi  $A \subseteq X$  definito da

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{N} \text{ oppure } X \setminus A \text{ ha un numero finito di elementi.}$$

1. Provare che  $\mathcal{T}$  definisce una topologia su  $X$ .
2. Trovare l'interno e la chiusura del sottoinsieme  $W = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$  in  $X$  con la topologia  $\mathcal{T}$ .
3. Dire se  $(X, \mathcal{T})$  è di Hausdorff e giustificare l'affermazione.
4. Dire se  $(X, \mathcal{T})$  è compatto e giustificare l'affermazione.

**Esercizio 2.** (6 punti) Nel piano  $\mathbb{R}^2$  con la topologia euclidea, consideriamo i seguenti sottospazi:

- $A =$  ellisse di equazione:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
- $B =$  retta di equazione:  $y = 0$

e definiamo  $X = A \cup B$ . Dimostrare che

1.  $A$  è un retratto di  $X$ , scrivendo una retrazione esplicita  $r_1 : X \rightarrow A$
2.  $B$  è un retratto di  $X$ , scrivendo una retrazione esplicita  $r_2 : X \rightarrow B$
3. dimostrare che  $A$  e  $B$  non possono essere entrambi retratti di deformazione di  $X$

**Esercizio 3.** (5 punti) Sia  $S$  la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1} c a^{-1} d b c b^{-1} e^{-1} d e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di  $S$  nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

**Esercizio 4.** (7 punti) Sia  $A$  una matrice quadrata complessa di ordine 6, avente polinomio caratteristico  $c_A(t) = (t - 4)^5(t - 3)$ . Determinare la forma canonica di Jordan di  $A$  sapendo che:

$$rk(A - 4I) = 4, \quad rk(A - 4I)^3 = 1.$$

**Esercizio 5.** (7 punti) Siano  $A, B, C, D$  punti del piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  in posizione generale. Dati due qualsiasi punti  $P$  e  $Q$ , indichiamo con  $\overline{PQ}$  la retta per tali punti. Siano

$$E = \overline{AB} \cap \overline{CD}, \quad F = \overline{AC} \cap \overline{BD}, \quad G = \overline{AD} \cap \overline{BC}.$$

1. Si mostri che  $E, F, G$  non sono allineati.
2. Cosa succede se i punti  $A, B, C, D$  sono distinti ma non in posizione generale?