Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 10 settembre 2024

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Si consideri l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall a \in A \quad \exists \epsilon > 0 \quad t.c. \quad (a-\epsilon, a+\epsilon) \cup \{0\} \subset A\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$ e dire se è più o meno fine della topologia euclidea.
2. Determinare l'interno di $[0, 1]$ e di $[-1, 1]$.
3. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x\}$ è un chiuso per la topologia $\mathcal{T}$. Nei casi in cui non lo è determinarne la chiusura.
4. Dire se $\mathbb{R}$ è compatto rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.
5. Dire se $\mathbb{R}$ è connesso rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

Soluzione.

1. La dimostrazione che $\mathcal{T}$ è una topologia è facile. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea, sappiamo che se $U \in \mathcal{E}$ allora $\forall x \in U \quad \exists \epsilon > 0$ tale che $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U$ e viceversa. Dunque gli aperti $A \in \mathcal{T}$ sono tutti e soli gli aperti euclidei che contengono 0. Quindi la topologia $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia euclidea.
2. L'interno di $[0, 1]$ è vuoto perchè tutti gli aperti non vuoti di $\mathcal{T}$ contengono un'intorno aperto di 0. L'interno di $[-1, 1]$ è $(-1, 1)$ che è il più piccolo aperto euclideo che contiene 0 ed è contenuto nell'intervallo chiuso.

3. Per ogni $x \neq 0$, l'insieme $\{x\}$ è un chiuso, essendo il suo complementare $(-\infty, x) \cup (x, +\infty)$ un aperto della topologia euclidea che contiene 0. Invece $\{0\}$ non è chiuso e il pi ù piccolo chiuso che lo contiene è $\mathbb{R}$.

4. Lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è compatto. Basta prendere come ricoprimento aperto $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

5. Lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso. Non esistono infatti aperti disgiunti non vuoti, in quanto tutti contengono 0.

Esercizio 2. (7 punti) Sia X in $\mathbb{R}^3$ il cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ dotato della topologia indotta da quella euclidea e siano A e B due punti distinti di X. Si consideri il sottospazio $Y = X \smallsetminus \{A, B\}$.

1. Al variare delle posizioni dei punti A e B su X, si suddividano i corrispondenti Y in classi di omeomorfismo.

2. Si mostri che, per ogni scelta di A e B, Y non è retratto di X.

Soluzione.

1. Ci sono tre classi di omeomorfismo: Y_1 se $A = 0$, Y_2 se A e B sono diversi dall'origine e nella stessa calotta del cono, Y_3 se A e B sono diversi dall'origine e in calotte opposte. Per distinguerli: Y_1 è sconnesso, mentre Y_2 e Y_3 sono connessi, pertanto non sono omeomorfi.

   Inoltre, Y_2 e Y_3 hanno entrambi un unico punto che li sconnette, l'origine. Se fossero omeomorfi, l'omeomorfismo dovrebbe mandare l'origine nell'origine e indurrebbe un omeomorfismo tra i complementari. Le componenti connesse di $Y_2 \smallsetminus \{0\}$ sono omeomorfe al piano meno un punto e al piano meno 3 punti, mentre le componenti connesse di $Y_3 \smallsetminus \{0\}$ sono entrambe omeomorfe al piano meno 2 punti. Dato che il piano meno un punto ha lo stesso tipo di omotopia della circonferenza, mentre il piano meno due punti no, non sono omeomorfi, per cui Y_2 non è omeomorfo a Y_3.

2. In effetti X è contraibile (è stellato rispetto all'origine), mentre Y non lo è mai.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Soluzione. Ci sono 1 faccia, 5 lati e 2 vertici (calcolando le classi di equivalenza dei vertici). Dunque

$$\chi(S) = 2 - 5 + 1 = -2$$

La superficie è orientabile perché non ci sono lati con lo stesso esponente. Quindi

$$\chi(S) = -2 = 2 - 2g$$

e si ottiene $g = 2$ e quindi la superficie S è la somma connessa di 2 tori.

Esercizio 4. (6 punti) Sia A una matrice quadrata complessa con polinomio caratteristisco $c_A(t) = (t-2)^5(t-3)^4$. Inoltre la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è molt-geom$(2) = 3$ e la dimensione massima dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore 3 è max-dim$(3) = 2$.

Determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date. Per ognuna delle forme trovate, indicare il polinomio minimo corrispondente.

Soluzione.

La condizione molt-geom$(2) = 3$ dice che ci sono 3 autovettori di autovalore 2 e quindi 3 blocchi con 2 sulla diagonale. Poiché l'autovalore 2 è ripetuto 5 volte, dobbiamo scrivere il numero 5 come somma di tre interi positivi. Ci sono 2 modi per farlo:

$$5 = 1 + 1 + 3, \qquad 5 = 1 + 2 + 2$$

La condizione max-dim$(3) = 2$ dice che i blocchi relativi all'autovalore 2 hanno dimensione massima 2 e almeno uno ha dimensione 2. Poiché l'autovalore 3 è ripetuto 4 volte, dobbiamo scrivere il numero 4 come somma di interi positivi minori o uguali a 2 e usando almeno una volta il numero 2. Ci sono 2 modi per farlo:

$$4 = 1 + 1 + 2, \qquad 4 = 2 + 2$$

Ognuno di questi modi può essere combinato con uno dei precedenti e quindi ci sono in totale 4 possibili forme di Jordan distinte.

I polinomi minini sono:

$$\begin{array}{ll} (1,1,3),(1,1,2) & m_A(t) = (t-2)^3(t-3)^2 \\ (1,1,3),(2,2) & m_A(t) = (t-2)^3(t-3)^2 \\ (1,2,2),(1,1,2) & m_A(t) = (t-2)^2(t-3)^2 \\ (1,2,2),(2,2) & m_A(t) = (t-2)^2(t-3)^2 \end{array}$$

Esercizio 5. (7 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $(x : y : z : w)$, si considerino le due rette $r : x + 2w = -y + 2z + w = 0$ e $s : 2x - 3y + z = z + w = 0$ e il punto $P = (1 : 0 : 1 : 0)$.

1. Dimostrare che r e s sono disgiunte.

2. Determinare la retta t passante per P che interseca sia r che s.

3. Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -a \\ 2 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali M definisce una proiettività $f\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa i due punti $A = (0 : 2 : 1 : 0)$ e $B = (-2 : 1 : 0 : 1)$.

Soluzione.

1. Per vedere che r e s sono disgiunte basta considerare il sistema formato dalle loro 4 equazioni, la cui matrice associata è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   che ha determinante non nullo (uguale a -2). Dunque il sistema ha solo la soluzione nulla e le due rette non si intersecano in $\mathbb{P}^3$.

2. Per trovare la retta t si usa il seguente procedimento. Si trova il fascio di piani passante per r e tra tali piani si trova quello passante per P, risulta avere equazione $\pi : 2x + y - 2z + 3w = 0$. Similmente si scrive

il fascio di piani per s e si determina quello passante per P, che ha equazione $\tau : 2x - 3y - 2z - 3w = 0$. La retta t cercata è l'intersezione di questi due piani. In forma parametrica:

$$x = u + 8v,\ \ y = 6v, z = u + 5v,\ \ w = -4v.$$

3. Si ha $f(A) = f(0 : 2 : 1 : 0) = (2a + 1 : -2 : -1 : 2a + 1)$ e $f(B) = f(-2 : 1 : 0 : 1) = (-2 : 1 : 0 : 2a + 2)$. Imponendo che A e B siano fissati da f, si ha che $a = -1/2$. Si verifica inoltre che la matrice così ottenuta ha determinante diverso da zero (uguale a 1) e dunque è la proiettività cercata.