

Esercizi su ricorsività e modelli dell'aritmetica

2 novembre 2024

1. Dimostrare in dettaglio che le seguenti funzioni sono primitive ricorsive:

- le funzioni costanti $c_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto n$
- la somma
- il prodotto
- l'esponenziale $(x, y) \mapsto x^y$
- il fattoriale $x \mapsto x!$
- la funzione predecessore $\text{pr}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x - 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- le funzioni $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ e $\overline{\text{sgn}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- la differenza troncata $x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \text{se } x < y \\ x - y & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- la funzione distanza $(x, y) \mapsto |x - y|$
- le funzioni minimo $\min(x, y)$ e massimo $\max(x, y)$ (insieme alle loro versioni $\min_k$ e $\max_k$ per insiemi di taglia $k > 2$)
- la funzione caratteristica dell'ordine $\chi_{\leq}$, la funzione caratteristica dell'uguaglianza $\chi_{=}$ e le loro varianti $\chi_{\geq}$, $\chi_{<}$, $\chi_{>}$, $\chi_{\neq}$.

2. Dimostrare nel dettaglio che le seguenti funzioni sono primitive ricorsive:

- la funzione $\text{Quoz}(n, m)$ che calcola il quoziente della divisione intera di n per m se $m > 0$, e 0 altrimenti;
- la funzione $\text{Res}(n, m)$ che dà il resto della divisione intera di n per m se $m > 0$, e n altrimenti;
- il minimo comune multiplo e il massimo comun divisore di due numeri.

3. Dimostrare che la relazione $|$ di divisibilità tra numeri naturali è ricorsiva primitiva. Concludere che per ogni $k > 0$, l'insieme dei multipli di k è ricorsivo primitivo.

4. Dimostrare che per ogni $k > 0$, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che manda $n \in \mathbb{N}$ nel più grande $j \in \mathbb{N}$ tale che $k^j \mid n$ è ricorsiva primitiva.

5. Dato $n > 0$, sia $\text{Div}(n)$ il reticolo dei divisori di n . Dimostrare che l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Div}(n) \text{ è un'algebra di Boole}\}$$

è ricorsivo primitivo.

[*Suggerimento.* $\text{Div}(n)$ è un'algebra di Boole se e solo se n è square-free, ovvero non esiste nessun $k \in \mathbb{N}$ tale che $k^2 \mid n$.]

6. Dimostrare che la biezione $\mathbf{J}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}: (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + x$ e le sue inverse sinistra e destra $(\cdot)_0, (\cdot)_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sono funzioni ricorsive primitive.
7. Definiamo per ricorsione su $k \geq 1$ le biezioni

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^1: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x \\ \mathbf{J}^{k+1}: \mathbb{N}^{k+1} &\rightarrow \mathbb{N}: (x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto \mathbf{J}(x_1, \mathbf{J}^k(x_2, \dots, x_{k+1})).\end{aligned}$$

Dimostrare che tutte le $\mathbf{J}^k$ e le loro inverse $(\cdot)_i^k$, $1 \leq i \leq k$, definite da $\mathbf{J}^k((x)_1^k, \dots, (x)_k^k) = x$ sono funzioni ricorsive primitive.

8. Dimostrare che la biezione

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto 2^n(2m+1) - 1$$

e le sue inverse sinistra e destra sono ricorsive primitive.

9. Dimostrare che per ogni funzione $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^\ell$ le affermazioni seguenti sono equivalenti:

- (a) Per ogni $1 \leq i \leq \ell$ la funzione $f_i = U_i^\ell \circ f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è ricorsiva (primitiva).
(b) La funzione $\mathbf{J}^\ell \circ f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è ricorsiva (primitiva).

10. Dimostrare che le operazioni di somma e prodotto sugli interi $\mathbb{Z}$ sono ricorsive rispetto alla codifica che manda $z \in \mathbb{Z}$ in $2z$ se $z \geq 0$ e in $-(2z+1)$ se $z < 0$.
11. Consideriamo la codifica per sequenze finite $\varphi: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $(x_1, \dots, x_k) \mapsto p_0^{x_1+1} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{x_k+1}$, dove $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è l'enumerazione crescente dei numeri primi. Dimostrare che φ è una codifica ricorsiva (ovvero $\text{rng}(\varphi)$ è un insieme ricorsivo) ed è ragionevole nel senso che le funzioni lunghezza, estrazione della i -esima coordinata e concatenazione sono tutte ricorsive nei codici (cfr. note del corso a p. 16).
12. Dimostrare nel dettaglio che la funzione che enumera la successione di Fibonacci in ordine crescente è ricorsiva primitiva.

[Suggerimento. Utilizzare la funzione memoria nello schema di ricorsione.]

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un insieme di funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. La collezione $\mathcal{R}(A)$ delle **funzioni ricorsive in A** è la più piccola classe contenente A , le funzioni c_0, S, U_i^k e chiusa per composizione, ricorsione e minimizzazione. Quando $A = \{f\}$ è un singoletto scriveremo $\mathcal{R}(f)$ invece di $\mathcal{R}(\{f\})$ e diremo che le funzioni in tale insieme sono ricorsive nell'oracolo f . Più in generale, se $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ è un insieme finito scriveremo semplicemente $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_n)$. Si osservi inoltre che $\mathcal{R}(\emptyset) = \mathcal{R}$, e se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ allora $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$.

13. Dimostrare che per ogni $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ esiste $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $\mathcal{R}(\{f, g\}) = \mathcal{R}(h)$.

[Suggerimento. Trovare h tale che $h \in \mathcal{R}(\{f, g\})$ e $f, g \in \mathcal{R}(h)$.]

14. Dimostrare che per ogni insieme finito $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ esiste $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(h)$.
15. Data una famiglia di funzioni $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiamo

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto f_{(n)_0}((n)_1).$$

Dimostrare che $f_n \in \mathcal{R}(h)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludere che per ogni $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ numerabile esiste $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(h)$.

16. Dati $A, B \subseteq \mathbb{N}$, diciamo che A è Turing riducibile a B , in simboli $A \leq_T B$, se e solo se $\chi_A \in \mathcal{R}(\chi_B)$.

- Dimostrare che la relazione $\leq_T$ è un preordine (ovvero è riflessiva e transitiva).
- Dimostrare che $A \leq_T \sim A$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$.
- Dimostrare che se $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo, allora $A \leq_T B$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$.
- Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se $A \leq_T \emptyset$.

17. Dati $A, B \subseteq \mathbb{N}$, diciamo che A è many-one riducibile a B , in simboli $A \leq_m B$, se e solo se esiste $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ricorsiva totale tale che $n \in A \iff f(n) \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (equivalentemente: $f^{-1}(B) = A$).

- Dimostrare che la relazione $\leq_m$ è un preordine.
- Dimostrare che per ogni $A, B \subseteq \mathbb{N}$, se $A \leq_m B$ allora $A \leq_T B$.
- Dimostrare che esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $A \not\leq_m \sim A$. Concludere che i preordini $\leq_T$ e $\leq_m$ sono distinti.
- Dimostrare che se $\emptyset, \mathbb{N} \neq A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo, allora $A \leq_m B$ per ogni $\emptyset, \mathbb{N} \neq B \subseteq \mathbb{N}$. Cosa accade se $A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{N}$?
- Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se $A \leq_m \{0\}$.

18. Si consideri la classe Σ_2^0 dei predicati $P \subseteq \mathbb{N}^k$ per cui esiste $R \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ tale che

$$P(\vec{x}) \iff \exists y_1 \forall y_2 R(\vec{x}, y_1, y_2).$$

Dimostrare che la classe Σ_2^0 è chiusa per sostituzioni ricorsive (mediante funzioni totali), intersezioni (= congiunzioni), unioni (= disgiunzioni), quantificazioni limitate e quantificazioni esistenziali (= proiezioni).

[Si possono utilizzare le proprietà degli insiemi (semi)ricorsivi viste a lezione.]

19. Più in generale, dimostrare che per ogni $n \geq 1$

- la classe Σ_n^0 è chiusa per sostituzioni ricorsive (mediante funzioni totali), intersezioni (= congiunzioni), unioni (= disgiunzioni), quantificazioni limitate e quantificazioni esistenziali (= proiezioni);
- la classe Π_n^0 è chiusa per sostituzioni ricorsive (mediante funzioni totali), intersezioni (= congiunzioni), unioni (= disgiunzioni), quantificazioni limitate e quantificazioni universali;
- la classe Δ_n^0 è chiusa per sostituzioni ricorsive (mediante funzioni totali), intersezioni (= congiunzioni), unioni (= disgiunzioni), quantificazioni limitate e complementi (dunque è un'algebra di Boole).

Dimostrare inoltre che per ogni $\Gamma \in \{\Sigma_n^0, \Pi_n^0, \Delta_n^0 \mid n \geq 1\}$, se $A \leq_m B$ e $B \in \Gamma$ allora $A \in \Gamma$.

20. Sia $k \in \mathbb{N}$. Una famiglia di insiemi $\{A_i \mid i \in I\}$ si dice *ricoprimento* di $\mathbb{N}^k$ se $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}^k$. Un *raffinamento* di $\{A_i \mid i \in I\}$ è un ricoprimento $\{B_i \mid i \in I\}$ di $\mathbb{N}^k$ tale che $B_i \subseteq A_i$ per ogni $i \in I$.

- (a) Dimostrare che ogni ricoprimento finito $\{A_1, \dots, A_n\}$ di $\mathbb{N}^k$ costituito da insiemi semiricorsivi si può raffinare ad un ricoprimento $\{B_1, \dots, B_n\}$ costituito da insiemi ricorsivi.

[Suggerimento. Utilizzare un'opportuna variante della dimostrazione del Teorema di Post.]

- (b) Dimostrare che $\{B_1, \dots, B_n\}$ può poi essere ulteriormente raffinato ad un ricoprimento $\{C_1, \dots, C_n\}$ costituito da insiemi ricorsivi a due a due disgiunti.
- (c) Utilizzando il caso $n = 2$, concludere che per gli insiemi Π_1^0 vale la seguente proprietà di separazione:
- Se $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ sono insiemi Π_1^0 disgiunti, allora esiste un insieme ricorsivo C che separa A da B , ovvero tale che $A \subseteq C$ e $B \cap C = \emptyset$.
21. Sia $k \in \mathbb{N}$.
- (a) Dimostrare che se $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ sono insiemi semiricorsivi tali che $P \cup Q$ è ricorsivo, allora esistono P', Q' ricorsivi tali che
- $P' \subseteq P$ e $Q' \subseteq Q$;
 - $P' \cap Q' = \emptyset$;
 - $P' \cup Q' = P \cup Q$.
- [Suggerimento. Utilizzare un'opportuna variante della dimostrazione del Teorema di Post.]
- (b) Concludere che se $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ sono insiemi Π_1^0 disgiunti, allora esiste un insieme ricorsivo C che separa A da B , ovvero tale che $A \subseteq C$ e $B \cap C = \emptyset$.
22. Svolgere gli esercizi 1–12 utilizzando la definibilità nel modello standard dell'aritmetica $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$, ovvero i Corollari 2.2.9–2.2.13 delle dispense. (Quando nel testo dell'esercizio vi sia “ricorsivo primitivo” si legga solo “ricorsivo”).
23. Dimostrare che gli insiemi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ sono entrambi numerabili. Concludere che in ciascuna delle seguenti classi ci sono funzioni che non sono ricorsive:
- funzioni costanti *parziali*;
 - funzioni totali;
 - funzioni iniettive;
 - funzioni suriettive;
 - biezioni;
 - funzioni f tali che $f^{-1}(n)$ è ricorsivo per ogni $n \in \mathbb{N}$.
24. Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione totale e tale che $\text{rng}(f)$ sia *finito*.
- (a) Dimostrare che se per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $f^{-1}(n)$ è ricorsivo, allora f è una funzione ricorsiva.
- (b) Dimostrare che sono equivalenti:
- f è ricorsiva;
 - $f^{-1}(A)$ è ricorsivo per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ ricorsivo;
 - $f^{-1}(A)$ è semiricorsivo per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ semiricorsivo.