Lezione 1 martedì 5 novembre 2024

immersione

2.35 Definition An embedding of M into N is an injective total map $h : M \hookrightarrow N$ such that

1. $a \in r^M \Leftrightarrow ha \in r^N$ for every $r \in L_{rel}$ and $a \in M^{n_r}$;
2. $h f^M(a) = f^N(h a)$ for every $f \in L_{fun}$ and $a \in M^{n_f}$.

Note that when $c \in L_{fun}$ is a constant 2 reads $h c^M = c^N$. Therefore $M \subseteq N$ if and only if $\mathrm{id}_M : M \to N$ is an embedding.

A surjective embedding is an isomorphism or, when domain and codomain coincide, an automorphism.

M sottostruttura di N se (a) dominio di $M \subseteq$ dominio di N

(b) $\mathrm{id}_M : M \hookrightarrow N$

(1) $r^M = r^N \cap M^{n_r}$

(2) $f^M = f^N \restriction M^{n_f}$

$A \subseteq N$ è (il dominio di) una sottostruttura M di N se

$r^M = r^N \cap A^{n_r}$

$f^M = f^N \restriction A^{n_f}$

è corretto se $\boxed{f^N[A^{n_f}] \subseteq A}$

<u>Fatto</u> l'intersezione di un insieme qualsiasi di sottostrutture di N è una sottostruttura di N.

Dato $A \subseteq N$. Posso definire $\langle A \rangle_N = \bigcap \{ M : A \subseteq M \subseteq N \}$

↑ minima sottostruttura contenente A

1.10 Lemma The following hold for every $A \subseteq N$

1. $\langle A \rangle_N = \left\{ t^N \ : \ t \text{ a closed } L(A)\text{-term} \right\}$

2. $\langle A \rangle_N = \left\{ t^N(a) \ : \ t(x) \text{ an } L\text{-term and } a \in A^x \right\}$

3. $\langle A \rangle_N = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, where
$$A_0 = A$$
$$A_{n+1} = A_n \cup \left\{ f^N(a) \ : \ f \in L_{\text{fun}},\ a \in A_n^{n_f} \right\}.$$

1.4 Example Let F be a field. The language of vector spaces over F, which we denote by L_F, extends that of additive groups by a unary function symbol k for every $k \in F$.

Recall that a vector space over F is an abelian group M together with a function $\mu : F \times M \to M$ satisfying some well-known properties. To view a vector space over F as an L_F-structure, we interpret the group symbols in the obvious way and each $k \in F$ as the function $\mu(k, \text{-})$. See Example 2.6.

quasi mai usata

Alternativa usiamo una struttura a 2-sorte $\langle F, V \rangle$

Funzioni $+_V$, $-_V$, 0_V funzioni che vivono in V

Funzioni $+_F$, $-_F$, $\cdot_F$, 0_F, 1_F funzioni che vivono in F

Funzione s di sorte $F \times V \longrightarrow V$

2.11 Definition We say that M and N are elementarily equivalent if

ee. $N \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \varphi,\qquad$ for every sentence $\varphi \in L$.

In this case we write $M \equiv N$. More generally, we write $M \equiv_A N$ and say that M and N are elementarily equivalent over A if the following hold

a. $A \subseteq M \cap N$

ee'. equivalence ee above holds for every sentence $\varphi \in L(A)$.

Caso particolare di $\equiv_A$ molto importante è quando $A = M$

Supponiamo che dominio di $M \subseteq$ dominio di N ?!

se $M \equiv_M N$ diremo che M è SOTTOSTRUTTURA ELEMENTARE di N

$$M \preccurlyeq N$$

dominio di $M \subseteq$ dominio di N ✓

$M \preccurlyeq N$ sse $M \models \varphi \iff N \models \varphi$ per ogni $\varphi \in L(M)$

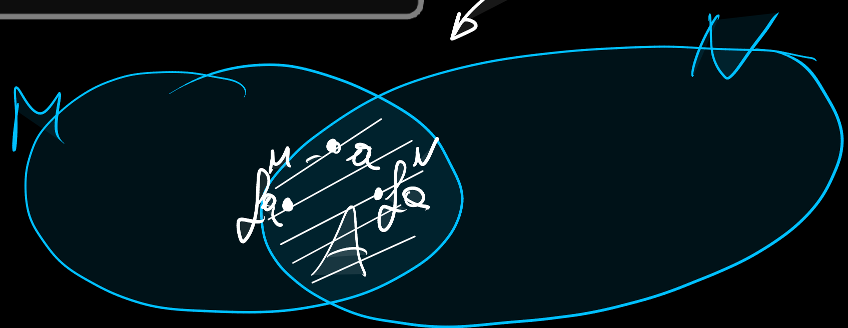
sse $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$ per ogni $\varphi(x) \in L$ e ogni $a \in M^{x}$ $= M^{|x|}$

(è possibile fissare un'unica tupla x di lunghezza ω)

> **2.13 Lemma** If M and N are such that $M \equiv_A N$ and A is the domain of a substructure of M then A is also the domain a substructure of N and the two substructures coincide.

Corollario se $M \preccurlyeq N$ allora $M \subseteq N$

Non succede



__Dim__ $f \in L_{fun}$ $a \in A^{n_f}$ $b = f^M a \in A$ voglio mostrare $b = f^N a$

Perché $M \equiv_A N$

$b = f^M a \iff M \models b = fa \iff N \models b = fa \iff b = f^N a$

$r \in L_{rel}$ . . . . $\square$

__Esercizio__

Analisi non Standard

(pausa fino alle 11:45)

L contiene tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

contiene tutti i sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}^n$

dominio di $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ha questa interpretazione di L

$f^{\mathbb{R}} = f$ $X^{\mathbb{R}} = X$

Sia ${}^*\mathbb{R} \succ \mathbb{R}$ modello non standard di $\mathbb{R}$

Abbreviazione $f^{{}^*\mathbb{R}} = {}^*f$ $X^{{}^*\mathbb{R}} = {}^*X$

gli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ si chiamano iperreali

gli elementi di ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ si chiamano iperreali non standard

---

$c \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo se ${}^*\mathbb{R} \models |c| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

infinito ${}^*\mathbb{R} \models |c| > k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

"ovviamente" se c è infinito c^{-1} è infinitesimo

"ovviamente" 0 è infinitesimo, l'unico di $\mathbb{R}$

<u>Lemma.</u> Esistono iperreali infiniti e infinitesimi $\neq 0$. Inoltre se $c \in {}^*\mathbb{R}$ finito allora esiste unico $b \in \mathbb{R}$ tale che $|b-c|$ è infinitesimo.

<u>Dim</u> Sia $c \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. Se c infinito $\Longleftrightarrow$ c^{-1} è infinitesimo $\neq 0$

quindi basta dimostrare "Inoltre" assumendo $c \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ finito. $A = \{a \in \mathbb{R} : c < a\}$.

$A \neq \mathbb{R}$, A limitato, quindi esiste $b = \inf A$.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se per assurdo $|c-b| \geq \varepsilon$ allora

(Caso I) $c - b \geq \varepsilon \iff c \geq b + \varepsilon$ ↯

(Caso II) $b - c \geq \varepsilon \iff c \leq b - \varepsilon$ ↯

unicità: $|b-c|$, $|b'-c|$ infinitesimi allora

$|b-c| + |b'-c|$ infinitesimo

$|b-b'| \leq |b-c| + |b'-c|$ infinitesimo

siccome b, b' sono reali $b = b'$

Scrivo $a \simeq b$ se $|a-b|$ infinitesimo.

Se $c \in {}^*\mathbb{R}$ finito definiamo $st(c)$ quel unico reale standard tale che $st(a) \simeq a$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, l \in \mathbb{R}$

<u>Lemma</u> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff$ per ogni $c \in {}^*\mathbb{R}$ se $c \simeq a \neq c$ allora ${}^*f(c) \simeq l$

ε, δ variabili $\dot{\varepsilon}$ $\dot{\delta}$ parametri

Dim $\Longrightarrow$ $\quad \mathbb{R} \models \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ [0<|x-a|<\delta \longrightarrow |fx-\ell|<\varepsilon]$

fissiamo $c \in {}^*\mathbb{R}$ t.c. $c \simeq a \neq c$ fissiamo $\dot\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vogliamo mostrare $|{}^*fc-\ell| < \dot\varepsilon$

$$\mathbb{R} \models \exists \delta>0\ \forall x\ [0<|x-a|<\delta \longrightarrow |fx-\ell|<\dot\varepsilon]$$ ottengo $\dot\delta \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{R} \models \forall x\ [0<|x-a|<\dot\delta \longrightarrow |fx-\ell|<\dot\varepsilon]$$

$${}^*\mathbb{R} \models \forall x\ [0<|x-a|<\dot\delta \longrightarrow |fx-\ell|<\dot\varepsilon]$$

$${}^*\mathbb{R} \models \underbrace{0<|c-a|<\dot\delta}_{\text{vera}} \longrightarrow |fc-\ell|<\dot\varepsilon$$ quindi $\left|{}^*fc-\ell\right| < \dot\varepsilon$ $\square$

Dim $\Longleftarrow$ (contronominale)

$$\mathbb{R} \models \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x\ [0<|x-a|<\delta \wedge |fx-\ell|\geq\varepsilon]$$

sia $\dot{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ tale che $\quad \mathbb{R} \models \forall \delta > 0 \; \exists x \left[0 < |x - a| < \delta \;\wedge\; |fx - \ell| \geq \dot{\varepsilon} \right]$

$^*\mathbb{R} \models \forall \delta > 0 \; \exists x \left[0 < |x - a| < \delta \;\wedge\; |fx - \ell| \geq \dot{\varepsilon} \right]$ fisso arbitrario $\dot{\delta} > 0$ infinitesimo

$^*\mathbb{R} \models \exists x \left[0 < |x - a| < \dot{\delta} \;\wedge\; |fx - \ell| \geq \dot{\varepsilon} \right]$ sia $c \in {}^*\mathbb{R}$ tale che

$$^*\mathbb{R} \models \underbrace{0 < |c - a| < \dot{\delta}}_{\substack{\text{implica} \\ c \approx a}} \;\wedge\; \underbrace{|fc - \ell| \geq \dot{\varepsilon}}_{\substack{\text{implica} \\ fc \not\approx \ell}} \qquad \square$$