Lezione 2 mercoledì 6 novembre 2024

2.22 Proposition For every $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for every $a, l \in \mathbb{R}$ the following equivalences hold.

a. $\lim_{x\to+\infty} fx = +\infty \iff {}^*f(c)$ is positive and infinite for every infinite $c > 0$

b. $\lim_{x\to+\infty} fx = l \iff {}^*f(c) \approx l$ for every infinite $c > 0$

c. $\lim_{x\to a} fx = +\infty \iff {}^*f(c)$ is positive and infinite for every $c \approx a \neq c$

d. $\lim_{x\to a} fx = l \iff {}^*f(c) \approx l$ for every $c \approx a \neq c$.

Corollario

f è continua $\iff$ ${}^*fa \approx {}^*fc$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ogni $c \approx a$

Corollario'

f è continua $\iff$ ${}^*fa \approx {}^*fc$ per ogni $c \approx a$ iperreali finiti

Domanda

f è ~~continua~~ ? $\iff$ ${}^*fa \approx {}^*fc$ per ogni $c \approx a$ iperreali ~~finiti~~

- ☐ continua
- ☐ nulla di ragionevole
- ☐ uniformemente continua
- ☐ Lipschitz
- ☐ none of the above
- ☐ all of the above

Proposizione

f è uniformemente continua $\Longleftrightarrow$ ${}^*f a \approx {}^*f c$ per ogni $c \approx a$ iperreali

---

$M \equiv N$ $\qquad M = \langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle \qquad N \ldots$

per ogni $\varphi \in L$ $\qquad M \models \varphi \Longleftrightarrow N \models \varphi$

2.35 Definition An embedding of M into N is an injective total map $h : M \hookrightarrow N$ such that

1. $\quad a \in r^M \quad \Leftrightarrow \quad ha \in r^N \qquad$ for every $r \in L_{\text{rel}}$ and $a \in M^{n_r}$;
2. $\quad h\, f^M(a) \quad = \quad f^N(h\, a) \qquad$ for every $f \in L_{\text{fun}}$ and $a \in M^{n_f}$.

Note that when $c \in L_{\text{fun}}$ is a constant 2 reads $h\, c^M = c^N$. Therefore $M \subseteq N$ if and only if $\text{id}_M : M \to N$ is an embedding.

A surjective embedding is an isomorphism or, when domain and codomain coincide, an automorphism.

1′. $\quad M \models r(a) \quad \Leftrightarrow \quad N \models r(ha) \qquad$ for every $r \in L_{\text{rel}} \cup \{\dot{=}\}$ and every $a \in M^{n_r}$.

2′ $\quad h\, t^M(a) \;=\; t^N(h\, a)$ for every term $t(x)$ and every $a \in M^x$.

3. $\quad M \vDash \varphi(a) \;\Leftrightarrow\; N \vDash \varphi(ha)$ for every $\varphi(x) \in L_{\text{qf}}$ and every $a \in M^x$.

se $M \subseteq N$ e $h = id_M$ $\quad$ 3 $\quad M \vDash \varphi(a) \Longleftrightarrow N \vDash \varphi(a)$ per ogni $\varphi(x) \in L_{qf}$

ogni $a \in M^x$

2.36 Theorem If $h : M \to N$ is an isomorphism then for every $\varphi(x) \in L$

$$M \vDash \varphi(a) \;\Leftrightarrow\; N \vDash \varphi(ha) \text{ for every } a \in M^x$$

In particular, if h is an A-isomorphism then $M \equiv_A N$.

$\Rightarrow$ se $A \subseteq M \cap N$ e $h \supseteq id_A$ (quindi $M \simeq_A N$ isomorfe su A) allora $M \equiv_A N$

Dim $\quad$ obbiettivo: $M \vDash \varphi(a) \Longleftrightarrow N \vDash \varphi(ha)$ per ogni $\varphi(x) \in L$ per ogni $a \in M^x$

per induzione. caso atomico vale perché h è un immersione. Induzione per $\wedge, \neg$ ovvia

vediamo il caso "$\exists y$"

IH $\qquad M \models \varphi(a,b) \iff N \models \varphi(ha, hb)$ per ogni $a \in M^x$, $b \in M^y$

obbiettivo

$$M \models \exists y\, \varphi(a,y) \iff N \models \exists y\, \varphi(ha, y) \text{ per ogni } a \in M^x$$

$$M \models \exists y\, \varphi(a,y) \iff M \models \varphi(a,b) \text{ per qualche } b \in M^y$$

$$\overset{IH}{\iff} \ (2)\ N \models \varphi(ha, hb) \text{ per qualche } b \in M^y$$

$$(1) \implies N \models \exists y\, \varphi(ha, y) \qquad \square/2$$

per dimostrare l'inverso di (1)

$$N \models \exists y\, \varphi(ha,y) \implies N \models \varphi(ha, c) \text{ per qualche } c \in N$$

suriettività $c = hb$ per $b \in M$

$$\implies N \models \varphi(ha, hb) \text{ per qualche } b \in M \implies (2)$$

2.37 Corollary If $h : M \to N$ is an isomorphism then for every $\varphi(x) \in L$.

$$h[\varphi(M^x)] \quad = \quad \varphi(N^x)$$

$\varphi(N^x) = \{a \in N^x : N \vDash \varphi(a)\}$

sottoinsieme di N definito da $\varphi(x)$

$\varphi(N) =$

$$h[\varphi(M^x)] = h[\{a \in M^x : M \vDash \varphi(a)\}] = \{ha : a \in M^x,\ N \vDash \varphi(ha)\}$$

$$= \{b \in N^x : N \vDash \varphi(b)\} = \varphi(N^x)$$

Lemma LSASE ① $M \equiv_A N$ ② $M \equiv_B N$ per ogni $B \subseteq A$ finito

① ⇒ ② banale ¬1 ⇒ ¬2 $M \not\equiv_A N$ esiste $\varphi \in L(A)$ tale che

$M \vDash \varphi \not\Leftrightarrow N \vDash \varphi$

φ è oggetto finito, quindi $\varphi \in L(B)$ per qualche $B \subseteq A$ finito, quindi $M \not\equiv_B N$ □

Esempi di sottostrutture elementari $L = \{<\}$ Pausa fino 10:40

$M = [0,1)_{\mathbb{Q}}$ $N = [0,2)_{\mathbb{Q}}$ chiaramente $M \subseteq N$

mostriamo che $M \preceq N$ ovvero $M \equiv_M N$

mostriamo che $M \equiv_B N$ per ogni $B \subseteq [0,1)$ finito

mostriamo che $M \simeq_B N$ per ogni $B \subseteq [0,1)$ finito

sia $b = \max B < 1$ $h \upharpoonright [0,b) = (x \mapsto x)$ $h \upharpoonright [b,1) =$ ______ $\square$

NON Esempi di sottostrutture elementari $L = \{<\}$

$M = [0,1]_{\mathbb{Q}}$ $N = [0,2]_{\mathbb{Q}}$ osservazione $M \simeq N$ quindi $M \equiv N$

addirittura $M \simeq_B N$ per ogni $B \subseteq [0,1)$

$\varphi \in L(M)$ $\varphi = \neg \exists x (x > 1)$

$M \not\models \varphi$ & $N \models \varphi$

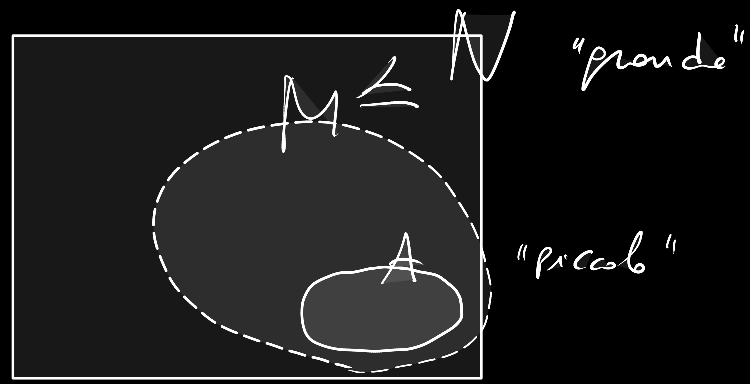
El. eq. + sottostruttura $\not\Rightarrow$ sottostruttura elementare

$\Leftarrow$

1.10 Lemma The following hold for every $A \subseteq N$

1. $\langle A \rangle_N = \left\{ t^N \ : \ t \text{ a closed } L(A)\text{-term} \right\}$
2. $\langle A \rangle_N = \left\{ t^N(a) \ : \ t(x) \text{ an } L\text{-term and } a \in A^x \right\}$
3. $\langle A \rangle_N = \bigcup_{n \in \omega} A_n,$ where
$$\begin{aligned} A_0 &= A \\ A_{n+1} &= A_n \cup \left\{ f^N(a) \ : \ f \in L_{\text{fun}},\ a \in A_n^{n_f} \right\}. \end{aligned}$$

Non esiste (in generale) la minima sottostruttura elementare che contiene un dato A. L'intersezione di due sottostrutture elementari non è una sottostruttura elementare.



vorremmo M "piccolo" $A \subseteq M \preceq N$

immaginiamo di "costruire" M "raccattando" elementi di N obiettivo $\quad M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$ $\quad$ per ogni $\varphi(x) \in L$

per ogni $a \in M^{n}$

$\forall x \dots$

Serve una caratterizzazione di $M \preceq N$ che menzioni solo $N \models$

Criterio di Tarski-Vaught

$A \subseteq N$ $\quad$ LSASE

(1) A è il dominio di $M \preceq N$ $\qquad$ (2) per ogni $\varphi(x) \in L(A)$, $|x| = 1$

$$N \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow N \models \varphi(a) \text{ per qualche } a \in A$$

Dim (1) $\Longrightarrow$ (2) (banale e inutile)

$$N \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow M \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow M \models \varphi(a) \text{ per qualche } a \in A$$

$$\Downarrow$$

$$N \models \varphi(a) \text{ per qualche } a \in A$$

Dim (2) $\Longrightarrow$ (1) $\quad$ $\boxed{\text{Prerequisito:}}$ A è il dominio di una sottostruttura

sia $f \in L_{fun}$, $a \in A^{n_f}$, mostriamo che $f^N a \in A$. $\quad N \models \exists y (fa = y) \overset{(2)}{\Rightarrow} N \models fa = b$ per $b \in A$

$$\Downarrow$$

$$f^N a \in A$$

$\boxed{\text{Prerequisito:}}$

per induzione su $\varphi(x) \in L$ mostriamo $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$ per ogni $a \in A^x$

Caso atomico perché $M \subseteq N$. Induzione per $\wedge, \neg$ banale. Caso "$\exists y$"

IH $\quad M \models \varphi(a, b) \iff N \models \varphi(a, b)$ per ogni $a, b \in A^{x,y}$

$$M \models \exists y\, \varphi(a, y) \iff M \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M$$

$$\overset{IH}{\iff} N \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M$$

$$\overset{\text{per (2)}}{\Longleftarrow}$$

$$\Rightarrow N \models \exists y\, \varphi(a, y) \qquad \square$$