

2.54 Lemma (Tarski-Vaught test) For every $A \subseteq N$ the following are equivalent

1. A is the domain of a structure $M \preceq N$
2. for every formula $\varphi(x) \in L(A)$, with $|x| = 1$,

$$N \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow N \models \varphi(b) \text{ for some } b \in A.$$

↪ obiettivo

1.10 Lemma The following hold for every $A \subseteq N$

1. $\langle A \rangle_N = \{t^N : t \text{ a closed } L(A)\text{-term}\}$
2. $\langle A \rangle_N = \{t^N(a) : t(x) \text{ an } L\text{-term and } a \in A^x\}$

$$3. \langle A \rangle_N = \bigcup_{n \in \omega} A_n, \text{ where } A_0 = A$$

$$A_{n+1} = A_n \cup \{f^N(a) : f \in L_{\text{fun}}, a \in A_n^{n_f}\}.$$

Löwenheim-Skolem ($\downarrow$) all'infinito

$A \subseteq N$ $\rightarrow$ infinito
 $A \subseteq M \preceq N$ $\rightarrow$ esiste M
 $|M| \leq |L(A)|$

Dim $A_0 = A$, $A_1 = A_0 \cup \left\{ a_\varphi \in N : N \models \varphi(a_\varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \varphi(x) \in L(A) \\ \varphi(N) \neq \emptyset \end{array} \right\} \right.$

$A_{n+1} = A_n \cup \left\{ a_\varphi \in N : N \models \varphi(a_\varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \varphi(x) \in L(A_n) \\ \varphi(N) \neq \emptyset \end{array} \right\} \right.$

$M = \bigcup_{n < \omega} A_n$ verifichiamo che $M \leq N$

sia $\varphi(x) \in L(M)$, $N \models \exists x \varphi(x)$.

$\Downarrow$

$\varphi(x) \in L(A_n)$ per n sufficientemente grande

$\Rightarrow N \models \varphi(a_\varphi)$ dove $a_\varphi \in M$

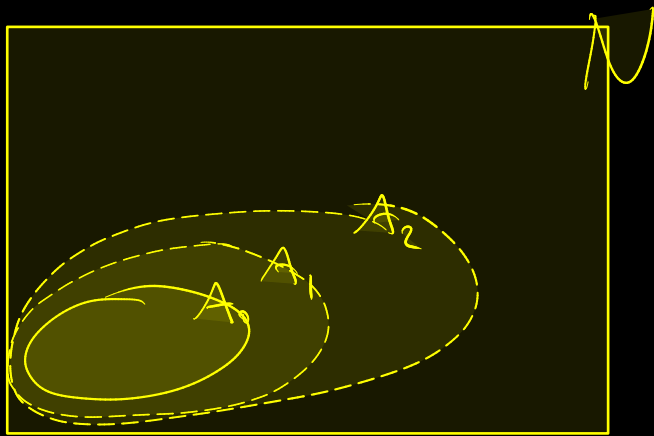
$\square$
2

$|M| \leq \sup_{n < \omega} |A_n|$ quindi basta mostrare che $|A_n| \leq |L(A)|$

induzione semplice $|A_n| \leq |L(A)|$ mostriamo $|A_{n+1}| \leq |L(A)|$

$|A_{n+1}| \leq |A_n| + |L(A_n)| \leq |L(A_n)| \leq |L(A)|$

$\square$



Seconda dimostrazione
(idea nel caso $L(A)$ numerabile)

Poniamo $A_0 = A$ enumeriamo $\{\varphi_{0,i}(x) \in L(A_0)\}$

↑ numerabile

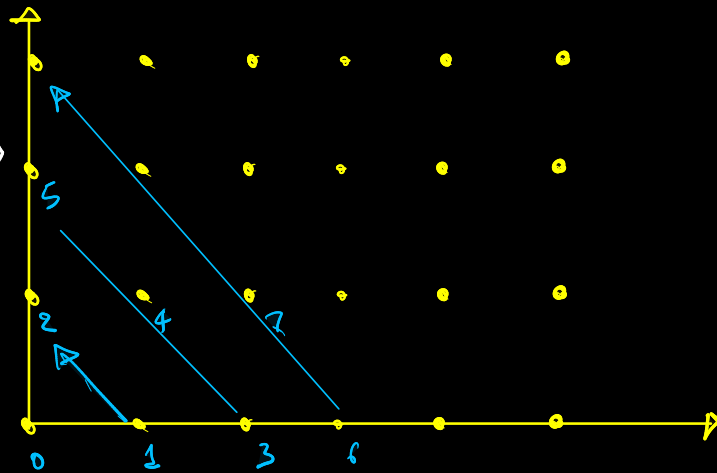
Poniamo A_n enumeriamo $\{\varphi_{n,i}(x) \in L(A_n)\}$

↑ numerabile

$A_{n+1} = A_n \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{un testimone di} \\ \varphi(x) \text{ se esistente} \\ \pi'_1(n), \pi'_2(n) \end{array} \right\}$

$\pi: \omega \rightarrow \omega^2$

$n \mapsto \langle \pi'_1(n), \pi'_2(n) \rangle$



Lema delle catene elementari

$$\text{posto } M_2 := \bigcup_{i < 2} M_i$$

$$M_i \preceq M_2 \text{ per ogni } i < 2$$

$$\text{catena elementare } \langle M_i : i < 2 \rangle$$
$$M_i \preceq M_j \text{ per ogni } i < j < 2$$

Dim obiettivo

$$M_i \models \varphi(a) \iff M_2 \models \varphi(a)$$

per ogni $i < 2$

per ogni $\varphi(x) \in L$

per ogni $a \in M_1^2$

induzione su $\varphi(a)$

IH

$$M_i \models \varphi(a) \iff M_2 \models \varphi(a)$$

per ogni $i < 2$

per ogni $a \in M_1^2$

caso interessante è " $\exists y$ "

IH

$$M_i \models \varphi(a, b) \iff M_2 \models \varphi(a, b)$$

per ogni $i < 2$

per ogni $a \in M_1^2$ $b \in M_1^2$

obiettivo

$$M_i \models \exists y \varphi(a, y) \iff M_2 \models \exists y \varphi(a, y) \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } i < 2 \\ \text{per cui } a \in M_i^a \end{array}$$

per i, a

$$M_i \models \exists y \varphi(a, y) \iff M_i \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M_i^y$$

$$\stackrel{IH}{\iff} M_2 \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M_i^y$$

pausa fino 15:38

$$\Leftarrow ??? \Rightarrow M_2 \models \exists y \varphi(a, y)$$

$$M_2 \models \exists y \varphi(a, y) \iff M_2 \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M_j \text{ con } j \geq i$$

$$\stackrel{IH}{\iff} M_j \models \varphi(a, b) \text{ per qualche } b \in M_j \text{ con } j \geq i$$

$$\iff M_j \models \exists y \varphi(a, y) \iff M_i \models \exists y \varphi(a, y) \quad \square$$

Una Teoria è un insieme di enunciati $T \subseteq L$

Un tipo è un insieme di formule $p(x) \subseteq L_x$

Una teoria è consistente se esiste $M \models T$ per ogni $\varphi(x) \in p$ $M \models \varphi(a)$
||

Un tipo è consistente se esiste M , esiste $a \in M^x$, tale che $M, a \models p(x)$
 $M \models p(a)$

Una teoria T è finitamente consistente se ogni $\psi \in \{1\}T$ è consistente

Un tipo $p(x)$ è finitamente consistente se ogni $\psi(x) \in \{1\}p$ è consistente
esiste M_ψ e $a_\psi \in M_\psi^x$ t.c. $M_\psi \models \psi(a_\psi)$

Un tipo $p(x) \subseteq L(M)$ è finitamente consistente ^{in M} se ogni $\psi(x) \in \{1\}p$ è consistente in M

esiste $a_\psi \in M^x$ t.c. $M \models \psi(a_\psi)$

se $M \models \exists x \psi(x)$

Esempio $M \models \langle \mathbb{N}, < \rangle$ $P(x) = \left\{ \exists y^{\geq m} y \leq x : m < \omega \right\}$

$$\exists x^{\geq m} \varphi(x) = \exists x_1, \dots, x_m \left[\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \varphi(x_i) \right]$$

$$\exists x^{\leq m} \varphi(x) = \neg \exists x^{\geq m+1} \neg \varphi(x) \quad \exists x^{\leq m} \varphi(x) = \exists x^{\leq m} \varphi(x) \wedge \exists x^{\geq m} \varphi(x)$$

$P(x)$ è finitamente consistente in M
non esiste $a \in M$ tale che $M \models P(a)$

$P(x)$ non è realizzabile in M

$M \models \exists x P(x)$ notazione

N.B. $\nexists$ non è formula del
1° ordine

5.1 Compactness Theorem Every finitely consistent theory is consistent.

corollario

5.5 Fact Every finitely consistent type $p(x) \subseteq L$ is consistent.

Teorema di completezza per i tipi
(versione debole)

Dim $L' = L \cup \{c\}$
 $\uparrow$
costanti

$$\kappa = \langle x_i : i \leq \kappa \rangle$$

$$\tau = \langle \tau_i : i \leq \kappa \rangle$$

$\varphi(\tau)$ teoria in L'
finitamente consistente

Per il Teorema 5.1 esiste M' L' -struttura t.c. $M' \models p(c)$
 Sia M il ridotto di M' a L . Quindi $M \models \exists x p(x)$ $\square$

5.7 Compactness Theorem for types Let M be an infinite model. If $p(x) \subseteq L(M)$ is finitely consistent in M then it is realised in some elementary extension of M .

$N \succ M$

Notazione M struttura $Th(M) = \{ \varphi \in L : M \models \varphi \}$ Teoria di M
 Teoria completa

M struttura, $a \in M^n$ $tp_M(a) = \{ \varphi(a) \in L : M \models \varphi(a) \}$ Tipo di a in M

Notazione $A \subseteq M$ struttura $Th(M/A) = \{ \varphi \in L(A) : M \models \varphi \}$ Teoria di M su A
 Teoria completa

$A \subseteq M$ struttura, $a \in M^n$ $tp_M(a/A) = \{ \varphi(a) \in L(A) : M \models \varphi(a) \}$ Tipo di a su A in M

Esercizio

$$M \equiv N$$



$$\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$$

$$M \equiv_A N$$



$$\text{Th}(M/A) = \text{Th}(N/A)$$

$$M \equiv_M N$$



$$\text{Th}(M/M) = \text{Th}(N/M)$$

Diagramme elementare

$$M, a \equiv_A N, b$$

definizione

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(b)$$

per φ : $\varphi(x) \in L(A)$



$$t_{P_M}(a/A) = t_{P_N}(b/A)$$