Lezione 4 martedì 12 novembre 2024

> **5.7 Compactness Theorem for types** Let M be an infinite model. If $p(x) \subseteq L(M)$ is finitely consistent in M then it is realised in some elementary extension of M.

$N \succ M$

Sinonimi

$M, a \equiv_A N, b \iff$ per ogni $\varphi(x) \in L(A)$ $|x| = |a| = |b|$

$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(b)$

$\iff \quad tp_M(a/A) = tp_N(b/A)$

$\iff \quad h = \{\langle a, b\rangle\} = \{\langle a_i, b_i\rangle : i < |a| = |b|\}$

$h : M \xrightarrow{el.} N$

per ogni $\varphi(x) \in L(A)$

$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(ha)$

b

per ogni $\varphi(x) \in L(A)$ $c \in (\mathrm{dom}\, h)^x$

$M \vDash \varphi(c) \iff N \vDash \varphi(hc)$

immersione elementare $h : M \xhookrightarrow{el.} N$

(mappa el. totale)

sia c una enumerazione di M ($M = \text{range } c$)

$$\boxed{\begin{gathered}\text{per ogni } \varphi(z) \in L(A) \qquad |z| = |c| \\ M \models \varphi(c) \iff N \models \varphi(hc)\end{gathered}}$$

5.6 Lemma (The elementary diagram method) Let M be ~~an infinite~~ model. Let c be an enumeration of M. Define $q(z) = \mathrm{tp}_M(c)$. Then, for every model N realizing $q(z)$, there is an elementary embedding $h : M \hookrightarrow N$.

$q(z)$ diagramma elementare $Th(M/M)$

se $N, b \models q(z)$

allora $h = \{\langle c, b \rangle\}$

$h : M \xhookrightarrow{el.} N$

$$\mathrm{tp}_M(c/A) = \{\varphi(z) \in L(A) : M \models \varphi(c)\}$$

Da verificare:

per ogni $\varphi(z) \in L(A) \qquad |z| = |c|$

$M \models \varphi(c) \iff N \models \varphi(hc)$

?

$M \models \varphi(c) \iff \varphi(z) \in q(z) \Rightarrow N \models \varphi(b) \iff N \models \varphi(hc)$

$\Leftarrow$ si ottiene usando $\neg\varphi$

5.7 Compactness Theorem for types Let M be an infinite model. If $p(x) \subseteq L(M)$ is finitely consistent in M then it is realised in some elementary extension of M.

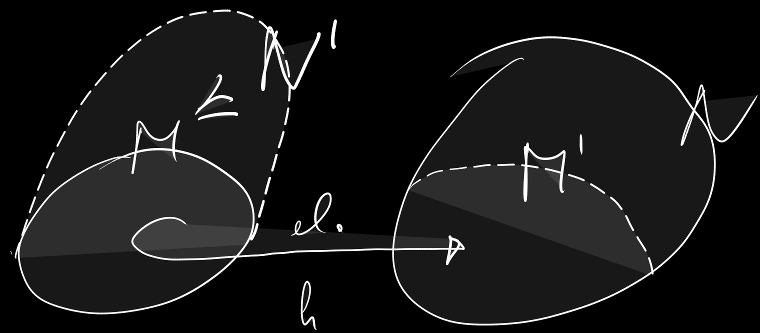
$N \succ M$

Dim $\quad q(z)$ come prima. Affermo che $q(z) \cup p(x)$ è fin. cons. (in M)

infatti se $\psi(x) \in \{1\}p$ allora esiste $a \in M \models \psi(a)$ quindi

$M \models q(c) \wedge \psi(a)$ corretta esiste $N \models \exists z x\, [q(z) \cup p(x)]$

uso Lemma per concludere che esiste $h : M \xrightarrow{el.} N$ $\square$



$M \preceq M'$

$M' \preceq N$

Teorema di Löwenheim-Skolem $\uparrow$ Ogni M infinito ha una estensione el. di cardinalità λ per ogni $\lambda \geq |M|$

<u>Dim</u> ① $p(x) = \{x \neq a \ ; \ a \in M\}$ è fin. cons. in M perché M infinito λ

quindi esiste $M \preceq N \models \exists x \, p(x)$

Teorema segue dal Lemma Catene Elementari $\square$

<u>Dim</u> ② $p(z) = \{z_i \neq z_j \ : \ i < j < \lambda\}$ $z = \langle z_i : i < \lambda \rangle$

è fin. cons. in M perché M infinito λ se $M \preceq N \models \exists z \, p(z)$

$|N| \geq \lambda$ $\square$

$L = \{<\}$ linguaggio degli ordini (stretti)

1. $x \not< x$ — irreflexive;
2. $x < z < y \;\rightarrow\; x < y$ — transitive.

li. $x < y \;\vee\; y < x \;\vee\; x = y$ — linear or total.

T_{lo}

nt. $\exists x, y\; (x < y)$ — non trivial

d. $x < y \;\rightarrow\; \exists z\; (x < z < y)$ — dense.

e. $\exists y\; (x < y) \;\wedge\; \exists y\; (y < x)$ — without endpoints.

T_{dlo}

DLO

Ricordiamo:

immersione (embedding) $h : M \hookrightarrow N$

$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(ha)$

$M \models fa = b \iff N \models fha = hb$

per induzione questa è equivalente a

Nota un isomorfismo parziale totale
non è un isomorfismo, ma è un'immersione

isomorfismo parziale

immersione parziale $h : M \longrightarrow N$ tale che

$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(ha)$

per ogni $\varphi(x) \in L_{qf}$ per ogni $a \in M^x$

$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(ha)$

per ogni $\varphi(x) \in L_{qf}$ per ogni $a \in M^x$

L_{at}

$L_{at^{\pm}}$

$M \models \varphi(a) \Longrightarrow N \models \varphi(ha)$

Lemma LSASE ① $h : M \xrightarrow{p.e.} N$

② esiste $k \supseteq h$ $\quad \mathrm{dom}\, k = \langle \mathrm{dom}\, h \rangle_M$

$\mathrm{range}\, k =$

e

$k : \langle \mathrm{dom}\, h \rangle_M \xrightarrow{\sim} \langle \mathrm{range}\, h \rangle_N$

Dim ② $\Rightarrow$ ① ovvia

Dim ① $\Rightarrow$ ② ricordiamo che

$\langle \mathrm{dom}\, h \rangle_M = \{ t(a) : t(x) \text{ termine},\ a \in (\mathrm{dom}\, h)^x \}$ $\quad \langle \mathrm{range}\, h \rangle_M = \{ t(a) : t(x) \text{ termine},\ a \in (\mathrm{range}\, h)^x \}$

k è definita come: $k(t(a)) = t(ha)$ $\square$

Se L è relazionale $h : M \longrightarrow N$ è immersione parziale sse

1. $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(ha)$
2. $M \models a = b \iff N \models ha = hb$

$\Rightarrow$ vero perché h funzione

$\Leftarrow$ richiede iniettività

OSS $L = \{<\}$ $h : M \longrightarrow N$

$M, N \models T_{lo}$ è p.e. sse

$M \models a < b \iff N \models ha < hb$

(di estensione)

Lemma $\forall$ $M \models T_{lo}$, $N \models T_{dlo}$, $k : M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$, $b \in M$

allora esiste $h : M \xrightarrow{p.e.} N$, $h \supseteq k$, $b \in \operatorname{dom} h$

esiste $c \in N$ tale che

Dim assumiamo $b \notin \operatorname{dom} k$

$A = \{a \in M : a < b\}$

$D = \{d \in M : b < d\}$

$\operatorname{dom} k = A \sqcup D$

$A < D$ siccome $k : M \xrightarrow{p.e.} N$ allora $k[A] < k[D]$ siccome $N \models T_{dlo}$

esiste $c \in N$ tale che $k[A] < c < k[D]$. Ovviamente $k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{p.e.} N$

$\square$

Corollario

$M \models T_{lo}$ numerabile, $N \models T_{dlo}$, $k: M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$, $k \in M$

allora esiste $h: M \xhookrightarrow{i} N$, $h \supseteq k$

Dim

sia $\langle a_i : i < \omega \rangle$ enumerazione di M

$h_0 = k$ e $h_{i+1} = h_i \cup \{\langle a_i\ c_i \rangle\}$ dove c_i è dato dal lemma in modo che h_{i+1} sia p.e.

$h = \bigcup_{i<\omega} h_i$ è immersione $\square$

Teorema

$M \models T_{dlo}$ numerabile, $N \models T_{dlo}$ numerabile, $k: M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$, $k \in M$

allora esiste $h: M \xrightarrow{\sim} N$, $h \supseteq k$

Dim

(condizioni back-and-forth) $\langle a_i : i < \omega \rangle$ enumera M

$\langle b_i : i < \omega \rangle$ enumera N

$h_0 = k$ $h_{i+\frac{1}{2}} = h_i \cup \{\langle a_i\ c_i \rangle\}$ osservo che $\left(h_{i+\frac{1}{2}}\right)^{-1}: N \xrightarrow{p.e.} M$

per il lemma $h_{i+1} = h_{i+\frac{1}{2}} \cup \{\langle d_i, b_i \rangle\}$. Quindi $h = \bigcup_{i<\omega} h_i$ è iso $\square$

__Corollario__ $M, N \models T_{dlo}$ numerabili allora $M \cong N$. T_{dlo} è ω-categorica

__Dim__ applichiamo Thm con $k = \emptyset$

__Corollario__ T_{dlo} è completa

__Lemma__ $|L| \le \lambda$ $\quad T$ λ-categorica $\Rightarrow$ T completa

__Dim__ basta notare che $M, N \models T \Rightarrow M \equiv N$

per LS↑ possiamo assumere $|M|, |N| \ge \lambda$

per LS↓ possiamo assumere $|M| = |N| = \lambda$

quindi $M \cong N$ quindi $M \equiv N$.