Lezione 5 mercoledì 13 novembre 2024

Def T λ-categorica se $M, N \models T$, $|M| = |N| = \lambda$ allora $M \cong N$

sottointeso T consistente, $\lambda \geq |L|$

Esercizio 6.11

(errato) senza modelli finiti

Thm $\checkmark$ T $\overset{\checkmark}{}$ λ-categorica, $|L| \leq \lambda$ $\Rightarrow$ T completa

$M, N \models T$ allora $M \equiv N$

Dim $M, N \models T$ se $|M| = |N| = \lambda$ allora $M \cong N$ allora $M \equiv N$.

In generale prendo $M' \succeq M$, $N' \succeq N$ tali che $|M'|, |N'| \geq \lambda$ (LS$\uparrow$)

prendo $M'' \preceq M'$ e $N'' \preceq N'$ tale che $|M''| = |N''| = \lambda$ (LS$\downarrow$)

per quanto visto prima $M'' \equiv N''$ quindi $M \equiv N$. $\square$

$$T = \exists^{=2} x \; x = x \;\vee\; \{\neg\} T_{dlo}$$

<u>Thm</u> $M, N \models T_{dlo}$ $\quad h : M \xrightarrow{i.p.} N$ allora $h : M \xrightarrow{el.} N$

<u>Dim</u> $|M| = |N| = \omega$ e se $|h| < \omega$ allora posso estendere h ad un isomorfismo. Ma gli isomorfismi sono mappe elementari. Quindi anche $h : M \to N$ è elementare. OSS. è sufficiente dimostrare il teorema per h finito.

[Ricordate che: $M \equiv_A N \iff M \equiv_B N$ per ogni $B \subseteq A$ finito] $\sim$ [$h : M \xrightarrow{el.} N \iff h \restriction B : M \xrightarrow{el.} N$ per ogni B finito]

Se M, N hanno cardinalità $\geq \omega$ prendo M', N' numerabili tali che

$\mathrm{dom}\, h \subseteq M' \preccurlyeq M$ $\quad$ range $h \subseteq N' \preccurlyeq N$

(uso $LS\downarrow$) per quanto visto sopra

$h : M' \xrightarrow{el.} N'$ quindi anche $h : M \xrightarrow{el.} N$ $\square$

Teorema $M \models T_{dlo}$ numerabile, $N \models T_{dlo}$ numerabile, $k : M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$

allora esiste $h : M \xrightarrow{\sim} N$, $h \supseteq k$

Dim (condizioni back-and-forth) $\langle a_i : i < \omega \rangle$ enumera M

$\langle b_i : i < \omega \rangle$ enumera N

$h_0 = k$ $\quad h_{i+\frac{1}{2}} = h_i \cup \{ \langle a_i, c_i \rangle \}$ osservo che $\left(h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{-1} : N \xrightarrow{p.e.} M$

per il lemma $h_{i+1} = h_{i+\frac{1}{2}} \cup \{ \langle d_i, b_i \rangle \}$. Quindi $h = \bigcup_{i<\omega} h_i$ è iso $\square$

usiamo solo il lemma di estensione

Lemma (di estensione) $M \models T_{lo}$, $N \models T_{dlo}$, $k : M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$, $b \in M$

allora esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{ \langle b, c \rangle \} : M \xrightarrow{p.e.} N$

Grafi aleatori

Linguaggio $L = \{R\}$ binario

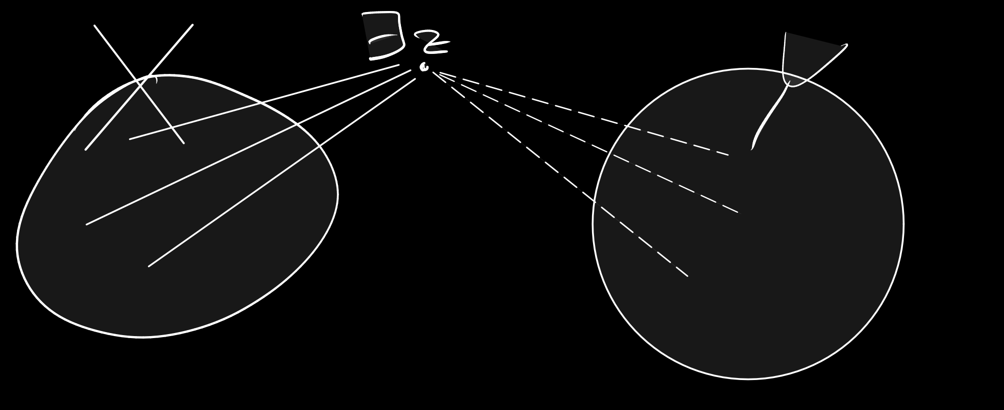
irriflessiva

Un grafo è un L-struttura M t.c. $M \models \forall x\, \neg R(x,x) \wedge \forall x y\, [R(x,y) \to R(y,x)]$

T_{gr} teoria dei grafi. La teoria dei grafi aleatori T_{RG} contiene T_{gr} e per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ l'assioma

$$\bigwedge_{1 \le i,j \le n} x_i \ne y_j \longrightarrow \exists z \left[\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i, z) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R(y_i, z) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} z \ne y_i \right]$$

[nt] $\exists x, y \quad x \ne y$



Esempio di prof aleatorio dominio $\mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$

$\zeta(n,m)$ vale se n-esimo numero primo divide m o viceversa

$n_1, \dots, n_k$ $\quad$ $m_1, \dots, m_k$ $\quad$ voglio h connesso a $n_1, \dots, n_k$

sconnesso da $m_1, \dots, m_k$

$$h = \prod_{i=1}^{k} p_{n_i}^{m_1 \cdots m_k} \quad \text{quindi} \quad p_h \nmid m_i$$

$\square$

Lemma (di estensione) $\forall$ $M \models \overset{T_{p\zeta}}{\cancel{T_{\zeta_0}}}$, $N \models \overset{T_{\zeta g}}{\cancel{T_{\zeta_0}}}$, $k : M \xrightarrow{p.e.} N$, $|k| < \omega$, $b \in M$

allora esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : M \xrightarrow{p.e.} N$

Dim $\quad A = \{a \in \operatorname{dom} k : M \models \zeta(b, a)\}$ $\quad D = \{d \in \operatorname{dom} k : M \models \neg \zeta(b, d)\}$

$k[A] \cap k[B] = \emptyset$ per assioma di $T_{\zeta g}$ esiste $c \in N$

tale che $\gamma(c, ha)$ per ogni $a \in A$ e $\gamma(c, hd)$ per ogni $d \in D$.

Immediato verificare che $k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{\text{i.p.}} N$. $\square$

Teorema $M \models \cancel{T_{dlo}}^{T_{rg}}$ numerabile, $N \models \cancel{T_{dlo}}^{T_{rg}}$ numerabile, $k : M \xrightarrow{\text{p.e.}} N$, $|k| < \omega$, $b \in M$

allora esiste $h : M \xrightarrow{\sim} N$, $h \supseteq k$

Corollario T_{rg} è ω-categorica e completa

Corollario se $M \models T_{dlo}, T_{rg}$ e $k : M \xrightarrow{\text{i.p.}} M$ finita allora

esiste $h : M \xrightarrow{\sim} M$ che estende k. Ovvero M è ultraomogeneo

---

Categorie di Modelli e Morfismi

Classe di L-strutture che chiamo modelli

Esempio: $Mod(T_0)$ tipicamente brutta

che se M modello e $N \equiv M$ allora anche N modello.

mappe parziali tra modelli

1. immersioni parziali

2. mappe elementari

Le teorie da tenere a mente sono T_{lo}, T_{gr}, T_{lo} nel linguaggio $L=\{<,0,1\}$

$L=\{r_i : i<\omega\}$ unari $\qquad T_0=\{\exists^{\geq i}_x\, r_i(x) : i<\omega\}$

Non buoni: TFAG, ID

Molto meno buoni: OAG, OID

Un modello N si dice λ-ricco se per ogni morfismo $k : M \to N$, $|k| < \lambda$ per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : M \to N$ è morfismo.

N è ricco se è λ-ricco per $\lambda = |N|$.

Un modello N si dice λ-universale se per ogni M modello $|M| \leq \lambda$ esiste morfismo $k : M \hookrightarrow N$. N universale se λ-universale $\lambda = |N|$

Un modello N si dice λ-omogeneo se per ogni morfismo $k : N \to N$, $|k| < \lambda$ esiste morfismo $h : N \to N$ totale e suriettivo. N omogeneo - - - - - .

<u>Proposizione</u> LSASE (1) N è λ-ricco

(2) per ogni M modello $|M| \leq \lambda$ e ogni morfismo $k : M \longrightarrow N$, $|k| < \lambda$

esiste morfismo $h : M \hookrightarrow N$ che estende k.