

$$L = \{ \varphi_i : i < \omega \}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{moni}}$

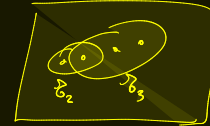
$$T_0 = \{ \neg \exists x [\varphi_i(x) \wedge \varphi_j(x)]^{\textcircled{1}}, \exists x \varphi_i(x) : i < j < \omega \} \quad \text{Mod}(T_0), \text{ i.p.}$$

i modelli N λ -ricchi hanno $|\varphi_i(N)| < i$ e hanno 2 elementi.

$$\text{in } N \setminus \bigcup_{i < \omega} \varphi_i(N).$$

ogni modello N di cardinalità
 $\lambda > \omega$ è ricco.
 discutiamo T^* la teoria dei ricchi

N.B. senza $\textcircled{1}$ non esistono modelli ricchi:
 non posso immergere nello stesso modello



$$T_i = \left\{ \varphi \in L : M \models \varphi \text{ per ogni } \lambda\text{-ricco e ogni } \lambda \geq \omega \right\} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ovvero da } \omega \text{ non esistono} \\ \text{ricchi } T_i \models \perp \end{array} \right.$$

Corollario Assumiamo $\mathcal{C}$ completo. Se $T_i \not\models \perp$ allora è completa

Dim Supponiamo $\varphi, \neg\varphi \notin T$. Esistono M, N λ -saturi tali che
 $M \models \neg\varphi$, $N \models \varphi$ prendo $\phi: M \xrightarrow{m} N$ per il Lemma questo è el. quindi $M \equiv N$

Teorema Assumiamo $\mathcal{L}$ countable, Se M, N λ -ricchi egu. $k: M \xrightarrow{m} N$ è mappa elementare.

Dim Possiamo enumerare k in finita. Obiettivo: costruire M', N'
 $|M'| = |N'| = \lambda$, $\text{dom } k \subseteq M' \preceq M$, $\text{range } k \subseteq N' \preceq N$ e costruire $h: M' \xrightarrow{\sim} N'$
 b.c. $h \supseteq k$.

Chiarante questo è sufficiente. Combiniamo 2 strategie:

① LST

② endomorfismi

non mi cura delle enumerazioni delle formule: vedi 2° dim di LST

$h = \bigcup_{i < \lambda} h_i$, $h_0 = k$, ai passi limite prendiamo l'unione.

dove $|h_i| < \lambda$

$h_{i+1/2} = h_i \cup \{ \langle b, c \rangle : \left. \begin{array}{l} b \in M \text{ un testimone di } \varphi(x) \in L(\text{dom } h_i) \text{ se consistente} \\ c \in N \text{ ottenuto dalle condizioni di } N \lambda\text{-ricco} \end{array} \right\}$

$$h_{i+1} = h_{i+\frac{1}{2}} \cup \left\{ \langle b, c \rangle : \begin{array}{l} c \in N \text{ un testimone di } \varphi(x) \in L(\text{comp } h_i) \text{ se consistente} \\ b \in M \text{ ottenuto dalle condizioni di } M \text{ } \lambda\text{-ricco} \end{array} \right\} \quad \square$$

Def $\mathcal{T}$ ha eliminazione dei quantificatori se per ogni $\varphi(x) \in L$ esiste $\psi(x) \in L_{\text{pf}}$ tale che $\mathcal{T} \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

Teorema LSAS $\in$ (1) $\mathcal{T}$ ha QE (2) per ogni $M, N \models \mathcal{T}$
ogni $k: M \xrightarrow{\text{e.p.}} N$ è elementare

Corollario $\mathcal{T}^*$ ha QE

siccome $M, N \models \mathcal{T}^*$ non $M' \geq M, N' \geq N$ $|M'| = |N'| = \lambda > \omega$
(per LS $\uparrow$) se $k: M \xrightarrow{\text{e.p.}} N$ allora $k: M' \xrightarrow{\text{e.p.}} N'$ quindi elementare

quindi anche $k: M \xrightarrow{\text{e.p.}} N$ è elementare. $\square$

Pausa fino 11:36

- a1 $(x+y)+z = y+(x+z)$
- a2 $x+(-x) = (-x)+x = 0$
- a3 $x+0 = 0+x = x$
- a4 $x+y = y+x$.

T_{ag}

$$L_{\text{ag}} = \{+, -, 0\}$$

$$x = x_1, \dots, x_n$$

$t(x)$ termine

$$T_{\text{ag}} \vdash t(x) = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

CONTEXTS $M \models T_{\text{ag}}$, $A \in M$ consideriamo solo $N \models T_{\text{ag}}$, $\langle A \rangle_M \subseteq N$
 voglio una traduzione sintattica di $\xrightarrow{\quad}$
 $N \models T_{\text{ag}} \cup \text{Diag } \langle A \rangle_M$

Def N structure, $\text{Diag } N = \{ \varphi \in L_{\text{at}}^+(N) : N \models \varphi \}$

Notazione quando T , $M \models T$, $A \in M$ sono chiari dal contesto
 $\vdash \dots$ da per $T_{\text{ag}} \cup \text{Diag } \langle A \rangle_M \vdash \dots$

OSS $M \models T_{\text{ag}}$, $A \in M$. Se $\varphi(x) \in L_{\text{at}}(A)$ allora $\vdash \varphi(x) \iff \sum_{i=1}^n m_i x_i = c$
 per $c \in \langle A \rangle_M$

Def $A \subseteq M \models T_{\text{sf}}$, $c \in M$ è **indipendente** da A se $\langle c \rangle_M \cap \langle A \rangle_M = \{0\}$
 il **rank** di M è la minima cardinalità di $A \subseteq M$ tale che ogni $c \in M$
 è dipendente da A .

Notazione $A \subseteq M \models T_{\text{sf}}$, $p(x) \in L(A)$ è **banale** se $\vdash p(x)$
 ovvero per ogni $\langle A \rangle_M \subseteq N \models T_{\text{sf}}$ $N \models \forall x p(x)$.

esempi di formule banali: $x=x$, $x+x+a = x+a+x$

Proposizione $A \subseteq M \models T_{\text{sf}}$, $c \in M$ non di torsione $[nc \neq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}^+]$

LSASE

- ① c indipendente da A ② $p(x) = \text{st-tp}_M(c/A) = \{ \varphi(x) \in L_{\text{st}}(A) : M \models \varphi(c) \}$
 è banale

Dim ① $\Rightarrow$ ② $\varphi(x) \in p$ ha le forme $nx=a$ per $a \in \langle A \rangle_M$ quindi $nc=a$

ricorda $\langle c \rangle_M \cap \langle A \rangle_M = \{0\}$ $a=0$ quindi $nc=0$ **quindi** $n=0$ quindi $\varphi(x)$ banale.

② $\Rightarrow$ ① $a \in \langle c \rangle_M \cap \langle A \rangle_M$ quindi $a = m \cdot c$ quindi $\pi a = a \in p(a)$

quindi $\vdash m \pi = a$ quindi $m = 0, a = 0$ $\square$

OSS $M, N \models T_{\text{sf}}$ $\pi: M \xrightarrow{\text{i.p.}} N$ a enumerazione di dom π

per ogni $b \in M$ indipendente da dom π , per ogni $c \in N$ indipendente da range π

$$\pi \cup \{ \langle b, c \rangle \} : M \xrightarrow{\text{i.p.}} N$$

$$\left[\pi \cup \{ \langle b, c \rangle \} : M \xrightarrow{\text{i.p.}} N \right] \Leftrightarrow \left[M \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow N \models \varphi(\pi a, c) \text{ per ogni } \varphi(x, z) \in L_{\text{sf}} \right]$$