OSS $M, N \models T_{ag}$ $\quad k : M \xrightarrow{i.p.} N$ a enumerazione di dom k

per ogni $b \in M$ indipendente da dom k, per ogni $c \in N$ indipendente da range k

$$k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{i.p.} N$$

$$\left[k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{i.p.} N \right] \iff \left[M \models \varphi(a, b) \iff N \models \varphi(ka, c) \text{ per ogni } \varphi(x, z) \in L_{at} \right]$$

$M \models \varphi(a, b) \Rightarrow \varphi(a, x)$ banale $\Rightarrow T_{ag} \cup \mathrm{Diag}\langle a \rangle_M \vdash \varphi(a, x)$

$T_{ag} \cup \mathrm{Diag}\langle ka \rangle_M \vdash \varphi(ka, x)$

$\Leftarrow$ si ottengono da k^{-1} $\qquad N \models \varphi(ka, c)$

$$T_{tfag} = T_{ag} \cup \{ nx = 0 \longrightarrow x = 0 \ : \ n \in \mathbb{Z}^+ \}$$

$\varphi(x) \in L_{at}$ $\varphi(x)$ ha al più una soluzione

$nx = a$ se avesse 2 soluzioni: $nb_1 = a$ e $nb_2 = a$

allora $n(b_1 - b_2) = 0$. quindi $b_1 = b_2$

Proposizione $M \models T_{tfag}$, $|M| > \omega$ allora $\text{rango}(M) = |M|$

cardinalità minima di $A \subseteq M$ tale che $\langle e \rangle_M \cap \langle A \rangle_M \neq \{0\}$ per ogni $e \in M$

Se $\langle e \rangle_M \cap \langle A \rangle_M \neq \{0\}$ allora $M \models \varphi(e)$

per $\varphi(x) \in L_{at}(A)$ non banale ma

$\varphi(x)$ ha un'unica soluzione quindi tali e sono al più $|L_{at}(A)| = |A|$ ... $\square$

Proposizione (*) $A \subseteq M \models T_{tfag}$ $p(x) = at^{\pm}\text{-}tp(b/A)$ per $b \in M$

$\Updownarrow$ $qf\text{-}tp(b/A)$

vale una delle seguenti 2 possibilità

(1) b indipendente da A ($p(x)$ banale) (2) $M \models \varphi(b)$ per $\varphi(x) \in L_{at}(A)$ t.c.

$\vdash \varphi(x) \longrightarrow p(x)$

<u>Dim</u> assumiamo $\neg$① quindi esiste $\varphi(x) \in L_{at}(A)$ non banale $M \models \varphi(b)$

$\varphi(x)$ è $nx = a$ dove $a \in \langle A \rangle_M$. Basta mostrare che per ogni $\xi(x) \in L_{at}(A)$

vale
$$\vee \begin{cases} \vdash nx = a \longrightarrow \xi(x) \\ \vdash nx = a \longrightarrow \neg\xi(x) \end{cases}$$

Sia $\xi(x)$ $mx = c$ con $c \in \langle A \rangle_M$

③ $$\vee \begin{cases} \vdash nx = a \longrightarrow mx = c \\ \vdash nx = a \longrightarrow mx \neq c \end{cases}$$

Per assurdo assumiamo $\neg$③ Esistono N_i e $b_i \in N_i$ tali che

$$\begin{matrix} N_1 \models nb_1 = a \wedge mb_1 \neq c \\ N_2 \models nb_2 = a \wedge mb_2 = c \end{matrix} \implies \begin{matrix} N_1 \models m\,nb_1 = ma \wedge n\,mb_1 \neq nc \\ N_2 \models m\,nb_2 = ma \wedge n\,mb_2 = nc \end{matrix} \implies$$

$$\begin{matrix} N_1 = ma \neq nc \\ N_2 = ma = nc \end{matrix} \quad \text{ma } a, c \in \langle A \rangle_M \quad \begin{matrix} \langle A \rangle_M = ma \neq nc \\ \langle A \rangle_M = ma = nc \end{matrix} \quad \text{↯}$$

Esercizio: dove abbiamo usato tf

$$T_{dag} = T_{tfag} \cup \{ \exists y \; ny = x \; : \; n \in \mathbb{Z}^+ \}$$

"esiste $\frac{x}{n}$"

Correzione

Lemma (di estensione) Falso Per ogni $M \models T_{tfag}$ e $N \models T_{dag}$, N rango $\lambda \geq \omega$

Per ogni $k : M \xrightarrow{i.p.} N$, $|k| < \cancel{\omega}\ \lambda$ per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ t.c.

$k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{i.p.} N$.

Pausa fino 13:38

Dim sia a una enumerazione di dom k

sia $p(x; z) = at^{\pm} - tp_M(b; a)$ voglio $c \in N$

tale che $N \models p(c; ka)$. È così

① b indipendente da dom k. Per OSS

ogni $c \in N$ indipendente da rang k va bene

c esiste perché rango$(N) > |k|$

$k : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ controesempio

$\langle 1, 0 \rangle \longmapsto 1$

$\langle 0, 1 \rangle \longmapsto \frac{n}{m}$

$m\langle 0,1\rangle = \langle 0, m \rangle$ $\quad n\langle 1,0\rangle = \langle n, 0\rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l} k(n\langle 1,0\rangle) = n \\ = \\ k(m\langle 0,1\rangle) = m \cdot \frac{n}{m} \end{array} \right.$$

② proposizione ⊛ esiste $\varphi(x;z) \in L_{at}$ tale che $\vdash \varphi(x;a) \longrightarrow p(x;a)$

in $N \vdash \varphi(x;ka) \longrightarrow p(x;ka)$ $\quad \varphi(x,a)$ è un equazione in N ha

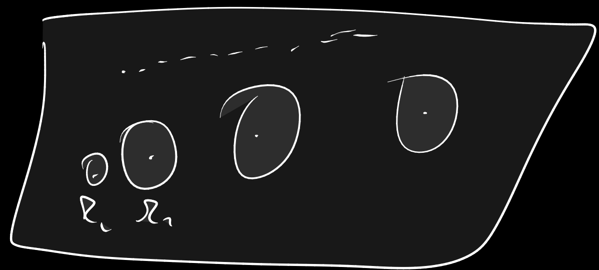
soluzione perché $N \models T_{dga}$. La soluzione di $\varphi(x,a)$ è il c desiderato.

<u>Riformulazione del Lemma</u> Categoria $Mod(T_{tfog})$, r.g. i modelli

di T_{dog} con rango $\lambda \geq \omega$ sono λ-ricchi.

<u>Corollario</u> T_{dog} è completa, ha QE, λ-categorica per $\lambda > \omega$

<u>Dim</u> Osservazione se $N \models T_{tfog}$, $|N| > \omega$ allora rango$(N) = |N|$



Domini di integrità

$$T_{id} = T_{CR} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \neq 1 \\ x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0 \end{array} \right\} \quad L = L_{ring} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$$

$$T_{id}^{p} = T_{id} \cup \{ \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ volte}} = 0 \}$$

$$T_{id}^{0} = T_{id} \cup \{ \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ volte}} \neq 0 : \ p \in \mathbb{Z}^{+} \}$$

$A \subseteq M \models T_{id}$ $\quad$ $t(x)$ termine in $L(A)$, $|x| = 1$

$$\vdash t(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad a_i \in \langle A \rangle_M$$

$b \in M$ è **Trascendente** su A se $p(x) = at\text{-}tp(b/A)$ è banale altrimenti b **algebrico** su A.

il **grado di Trascendenza** di M è la minima cardinalità di $A \subseteq M$ tale che ogni elemento di M è algebrico su A. <u>OSS</u> se $|M| > \omega$ allora grado di Trascendenza $= |M|$

8.18 Proposition Let $A \subseteq M \models T_{\mathrm{id}}$. For $b \in M$ let $p(x) = \mathrm{at}^{\pm}\text{-}\mathrm{tp}(b/A)$. Then one of the following holds

1. b is transcendental over A
2. $M \models \varphi(b)$ for some $\varphi(x) \in L_{\mathrm{at}}(A)$ such that $\vdash \varphi(x) \to p(x)$.

Dim Assumo ¬①. Esiste un polinomio $\varrho(x)$ di grado minimo t.c. $M \models \varrho(a)=0$

la formula $\varphi(x)$ è $\varrho(x)=0$. Devo mostrare che per ogni $\xi(x) \in L_{at}(A)$

$$\checkmark \begin{cases} \varrho(x)=0 \longrightarrow \xi(x) \\ \varrho(x)=0 \longrightarrow \neg\xi(x) \end{cases}$$

Sia $\varrho'(x)=0$ la formula $\xi(x)$

Assumiamo provvisoriamente che $\langle A \rangle_M$ sia un campo

esiste $d(x)$ m.c.d. di $\varrho(x)$ e $\varrho'(x)$

$$d(x) \cdot t(x) = \varrho(x)$$
$$d(x) \cdot t'(x) = \varrho'(x)$$

$\varrho(x)$ ha grado minimo quindi ci sono 2 casi

Caso ① $t(x)=t$ costante. quindi $\varrho(x) \mid \varrho'(x)$ $\qquad \varrho(x)=0 \longrightarrow \varrho'(x)=0$

Caso ② $d(x)=d$ costante applico Bézout $d = \varrho(x)\cdot c(x) + \varrho'(x)\cdot e(x)$

quindi $\varrho(x)=0 \longrightarrow \varrho(x) \neq 0$.

Alternativamente lavoro nel campo delle frazioni di $\langle A \rangle_M$ Tutto vale con $\dfrac{d(x)}{e}$ al posto di $d(x)$ $\square$

The theory of algebraically closed field, which we denote by T_{acf}, also contains the following axioms for every positive integer n

ac. $\exists x\ (x^n + z_{n-1}x^{n-1} + \cdots + z_1 x + z_0 \quad = \quad 0)$.

8.19 Proposition Let $A \subseteq M \vDash T_{\mathrm{id}}$ and let $\varphi(x) \in L_{\mathrm{at}}(A)$, where $|x| = 1$, be consistent. Then $N \vDash \exists x\, \varphi(x)$ for every model $N \vDash T_{\mathrm{acf}}$.

8.20 Lemma Let $k : M \to N$ be a partial isomorphism of cardinality $< \lambda$, where $M \vDash T_{\mathrm{id}}$ and $N \vDash T_{\mathrm{acf}}$ has transcendence degree $\geq \lambda$. Then for every $b \in M$ there is $c \in N$ such that $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : M \to N$ is a partial isomorphism.

<u>Riformulazione del Lemma</u> Categoria $\mathrm{Mod}(T_{id})$, n.f. i modelli di T_{acf} con grado di trasc. $\lambda \geq \omega$ sono di λ-ric .

8.22 Corollary The theory T_{acf} has elimination of quantifiers.

8.23 Corollary The theories T^p_{acf} are complete and uncountably categorical (i.e. λ-categorical for every uncountable λ).