

$$A \in M \models T \quad \uparrow \text{ completa}$$

M infinito

Lezione 9 giovedì 21 novembre 2024

$$p(x) \in L(A) \begin{cases} \text{fin. cons.} \\ \text{fin. cons. in } M \end{cases}$$

OSS $k: M \xrightarrow{\text{el.}} N$, α enumerazione di $\text{dom } k$, $p(x; z) \in L$ t.c. $p(x; \alpha)$ fin. cons. in M
 allora $p(x; k\alpha)$ è fin. cons. in N . Infatti " $p(x; \alpha)$ fin. cons. in M " vuol dire
 per ogni $\psi(x; z) \in \{1\}P$ $M \models \exists x \psi(x; \alpha)$ siccome $k: M \xrightarrow{\text{el.}} N$, $N \models \exists x \psi(x; k\alpha)$.

N.B. $p(x; \alpha) \not\text{fin. cons. in } M \Rightarrow p(x; k\alpha)$ è fin. cons. in N .

$|x| \leq |N|$ va anche bene

Def N è SATURO se, è infinito, e per ogni $p(x) \in L(A)$, $\forall A \subseteq N$ piccolo ($|A| < |N|$)

fin. consistente in N $p(x)$ è realizzato in N

[N realizza tutti i tipi]

N non realizza $\{x \neq a : a \in N\}$.

Teorema Ogni Teoria T con un modello infinito ha un modello saturo.

(ZFC+)

in generale i modelli saturi hanno cardinalità λ tale che $\lambda = \lambda^{\leq \lambda} = \bigcup_{\mu < \lambda} \lambda^\mu$

l'esistenza di cardinali $\lambda = \lambda^{\leq \lambda}$ segue da $\nVdash^{GHC}$
 Perché $2^{\text{cof}(\lambda)} > \lambda$ $\Downarrow$ λ regolare $\nVdash^{>\omega}$ λ è inaccessibile $\left(\mu < \lambda \Rightarrow 2^\mu < \lambda \right)$
 $\{2, \aleph_1, \dots, \aleph_{\mu-1}\} \Rightarrow \bigcup_{i < \mu} \aleph_i < \lambda$
 $V_\lambda \models ZFC$

Def ($|L| \leq \lambda$) N è λ -SATURO se per ogni $p(x) \in L(A)$, $A \subseteq N$, $|A| < \lambda$
 fin. consistente in N $p(x)$ è realizzato in N

Teorema T , $M \models T$ infinito, $\lambda \geq |L|, |M|$, $\lambda^{\leq \lambda} = \lambda$. Allora
 esiste $N \supseteq M$, $|N| = \lambda$, saturo.

Dim (Abbozzo) Costruiamo catena elementare $\langle M_i : i < \lambda \rangle$, $|M_i| = \lambda$
 $M_0 = M$, ci passi limite prendo l'unione. Dato M_i costruisco M_{i+1} come segue;

Sia $\langle p_i(x_i) : i < \lambda \rangle$ una enumerazione di Tutti i tipi su A con $A \in M_i$, $|A| < \lambda$
fin. cons.

?= contiamo gli $A \in M_i$ di cardinalità $\mu < \lambda$: sono 2^μ

contiamo i tipi su A : $2^{|L(A)|} = 2^{|A|} = 2^\mu$

contiamo i tipi su qualche A di card. μ : $2^\mu \cdot 2^\mu = 2^\mu$

facciamo come su $\mu < \lambda$ otteniamo $\bigcup_{\mu < \lambda} 2^\mu = 2^{\lambda} = \lambda$

vediamo $\{p_i(x_i) : i < \lambda\}$ in $M' \models M$ siano $M', e_i \models p_i(x_i)$

Sia $M_i \preceq M'$ di card λ che contiene $M_i, \{e_i : i < \lambda\}$.

dimostriamo che $N = \bigcup_{i < \lambda} M_i$ è saturo. Prendi $A \in N$, $|A| < \lambda = |N|$

prendi $p(x) \in L(A)$. Per regolarità $A \in M_i$ per qualche $i < \lambda$.

quindi $p(x)$ è uno dei tipi enumerati in $\{p_i(x_i) : i < \aleph\}$ quindi è
realizzato in M_{i+1} e anche in N .

Corso fino alle 15:49

M categoria L tutte le L -strutture, mappe elementari

Teorema $|L| \leq \aleph$, N modello, LSASE

① N è $\aleph$ -saturato ② N è $\aleph$ -ricco

③ N realizza tutti i tipi $p(x) \in L(A)$, $|A| < \aleph$, $A \in N$, $|A| < \aleph$
 $\uparrow$ notate la differenza $\uparrow$

Dim ① $\Rightarrow$ ② $k: M \xrightarrow{el} N$, $|k| < \aleph$, $b \in M$
 dobbiamo trovare $c \in N$ tale che $k \cup \{b, c\}: M \xrightarrow{el} N$.

ora vuol dire $\phi: M \xrightarrow{el} N$?

$M \equiv N$, $Th(M) = Th(N)$

$\phi_k: M \xrightarrow{el} N$ see

$M \models \phi(x) \iff N \models \phi(kx)$ per ogni $\phi(x) \in L$
 $x \in (dom k)^{|x|}$
 $\phi \in (L)^{|x|}$

Sia α enumerazione di $dom k$, sia $p(x; z) = \bigwedge_M p(b, z)$. $p(x, z)$ è $\forall$ -costante in M fin. cons.

Per OSS $p(x, k\alpha)$ fin. cons in N . N è $\aleph$ -saturato, e $|k\alpha| < \aleph$ quindi
 esiste $c \in N \models p(x, k\alpha)$. Questo c è quello che serve $\square/3$

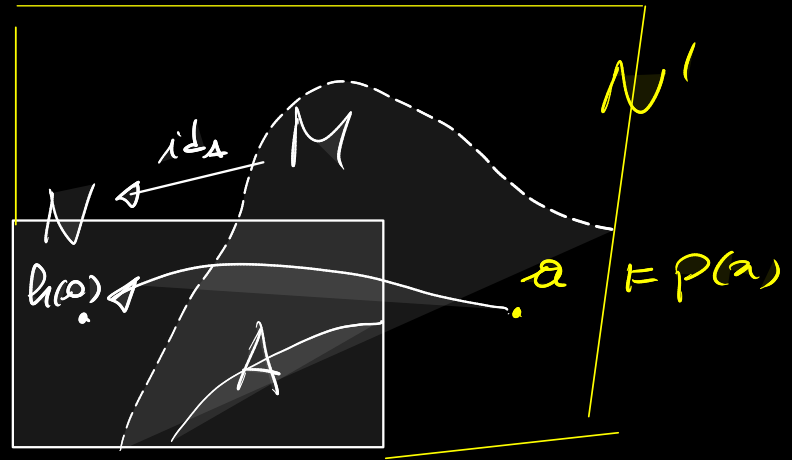
② $\Rightarrow$ ③ $p(\alpha) \in L(A)$, $A \in N$, $|A| < 2$ con $|\alpha| \leq 2$ dato.

Per compatterla esiste $N' \geq N$ che realizza $p(\alpha)$. Diciamo $N', a \models p(\alpha)$

Sia $M \preceq N'$, $a \in M^x$, $A \in M$

$|M| \leq 2$ applico $LS \downarrow$. Notiamo che

$id_A : M \xrightarrow{el.} N$ quindi $\checkmark$ esiste



Π
 $h : M \hookrightarrow N$ "chiamamento" $N, h(a) \models p(\alpha)$. $\square \frac{2}{3}$

③ $\Rightarrow$ ① bende $\square$

omogeneo (rispetto a $\mathcal{U}$)
vuol dire

$$h : N \xrightarrow{m} N$$

$|h| < |N|$ ento

$$\Pi$$

 $h : N \xrightarrow{\sim} N$

nel caso di $\mathcal{U}$ se $N, a \equiv N, h$ $|a| < |N|$
allora ento $h \in \text{Aut}(N)$ t.c. $h(a) = a$

chiamo $O_N(a)$ orbita di a sotto l'azione di $\text{Aut}(N)$ e si ha

$$O_N(a) = \{fa : f \in \text{Aut}(N)\} = P(N) \quad P(a) = \text{tp}(a)$$