fissato una volta per tutte

Lezione 10 martedì 26 novembre 2024

Contesto

$\mathcal{U}$ modello saturo di cardinalità $\kappa > |L|$ (inaccessibile se serve)

modello mostro

più grande di qualsiasi cardinalità cui potremo essere interessati.

$\varphi(x) \in L(\mathcal{U})$ vale $\iff$ $\mathcal{U} \models \forall x\, \varphi(x)$

$\varphi(x) \in L(\mathcal{U})$ consistente $\iff$ $\mathcal{U} \models \exists x\, \varphi(x)$

M è un modello $\iff$ $M \preceq \mathcal{U}$ piccolo $|M| < \kappa$

A, B, C insiemi piccoli parametri

per insiemi non piccoli uso $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$

fissiamo $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo

La topologia su $\mathcal{U}^x$ indotta da A è quella generata dalla base di chiusi

$$\{\varphi(\mathcal{U}^x) : \varphi(x) \in L(A)\} \quad \left[\text{i chiusi hanno la forma } p(\mathcal{U}^x) \text{ con } p(x) \subseteq L(A)\right]$$

OSS $\{\varphi(\mathcal{U}^x) : \varphi(x) \in L(A)\}$ è anche una base di aperti per la stessa topologia

NOTA topologie che hanno una base di chiusi che è anche una base di aperti si dicono 0-dimensionali.

OSS $a, b \in \mathcal{U}^x$, $a \equiv_A b$ [ovvero $tp(a/A) = tp(b/A)$] allora a e b hanno gli stessi intorni

$[\mathcal{U}, a \equiv_A \mathcal{U}, b]$

quindi la A-topologia non è T_0. Il quoziente di Kolmogorov $\mathcal{U}^x/\equiv_A$ è Hausdorff (T_2) infatti se $a \not\equiv_A b$ allora $\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$ per $\varphi(x) \in L(A)$

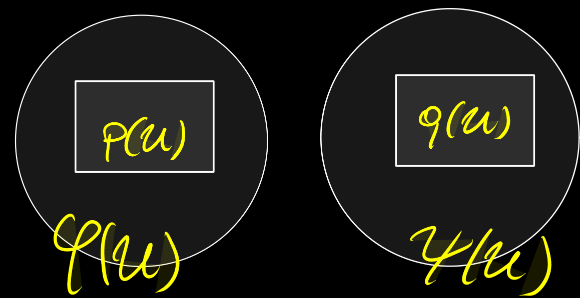
quindi $a \in \varphi(\mathcal{U}^x)$ $b \in \neg\varphi(\mathcal{U}^x)$ $\square$

FATTO $\mathcal{U}^x/\equiv_A$ è normale. **Dim** $p(x), q(x) \subseteq L(A)$

$p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset$ equivalente $p(x) \cup q(x) \vdash \bot$

per compattezza (saturazione) esistono $\varphi(x) \in \{\wedge\}p$ $\psi(x) \in \{\wedge\}q$

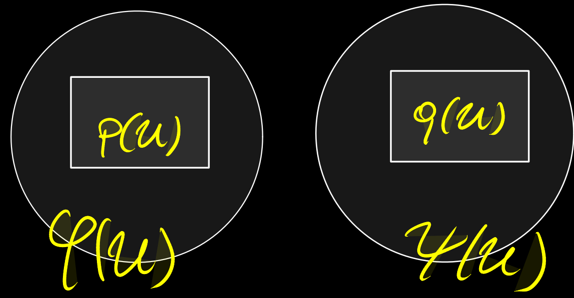
tali che $\varphi(x) \wedge \psi(x) \vdash \bot$ $\square$



FATTO* $p(x) \subseteq L(A)$, $q(x) \subseteq L(B)$ $\quad p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset$

esistono $\varphi(x) \in \{\wedge\}p$ $\psi(x) \in \{\wedge\}q$ tali che

$\varphi(x) \wedge \psi(x) \vdash \bot$ ∎



OSS $p(x) \subseteq L(A)$, $q(x) \subseteq L(B)$ $\quad p(\mathcal{U}) = \neg q(\mathcal{U})$

allora $p(x) \leftrightarrow \varphi(x)$ e $q(x) \leftrightarrow \psi(x)$ dove $\varphi(x) \in \{\wedge\}p$ $\psi(x) \in \{\wedge\}q$

Infatti $\varphi(x) \to p(x) \to \neg q(x) \to \varphi(x)$

$\psi(x) \to q(x) \to \neg p(x) \to \psi(x)$ ∎

Aut$(\mathcal{U}/A)$ = il gruppo di automorfismi $f : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ tali che $f \supseteq id_A$

[A-automorfismi]

agisce su $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^x$, agisce sui sottoinsiemi definibili di $\mathcal{U}^x$.

Infatti: $\varphi(x;z) \in L$ $\quad f[\varphi(\mathcal{U}^x;b)] = \{fa : \varphi(a;b),\ a \in \mathcal{U}^x\}$

se $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$ allora $= \{fa : \varphi(fa;fb),\ a \in \mathcal{U}^x\}$

$= \{a : \varphi(a;fb),\ a \in \mathcal{U}^x\} = \varphi(\mathcal{U}^x;fb)$

N.B. $f[\varphi(\mathcal{U}^x;b)] = \varphi(\mathcal{U}^x;fb)$!!!

Def $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$

è invariante $\underbrace{\text{per l'azione di } \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)}_{\text{su } A}$ se $f[\mathcal{D}] = \mathcal{D}$

[A-invariante]

$\{fa : f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)\}$

OSS $\mathcal{D}$ è invariante $\Longleftrightarrow$ per ogni $a \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{O}(a/A) \subseteq \mathcal{D}$

OSS $a \equiv_A b \Longleftrightarrow b \in \mathcal{O}(a/A)$ per omogeneità

$b \models p(x) = tp(a/A)$ quindi $p(\mathcal{U}^x) = \mathcal{O}(a/A)$

Pausa fino alle 11:40

$\square$

<u>Proposizione</u> $\varphi(x) \in L(\mathcal{U})$ LSASE ① $\varphi(\mathcal{U})$ è invariante su A

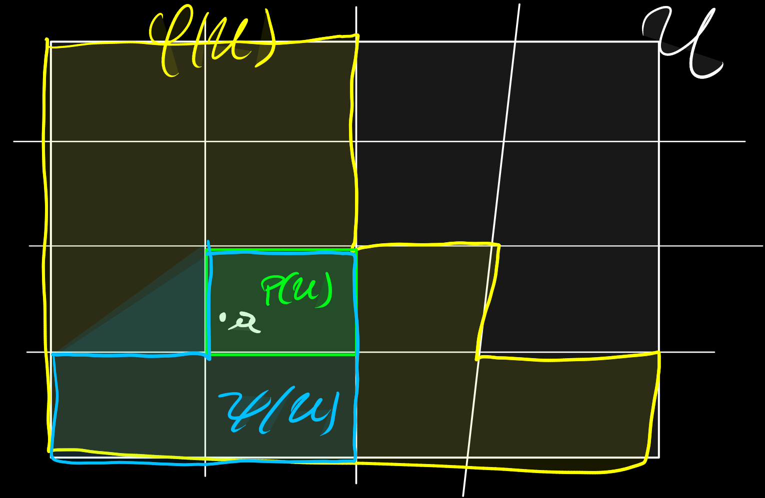
② esiste $\psi(x) \in L(A)$ tale che $\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x)$

<u>Dim</u> ② $\Rightarrow$ ① ovvio

① $\Rightarrow$ ②

$$\varphi(\mathcal{U}) = \bigcup_{\varphi(\sigma)} O(\sigma/A) \equiv_A$$

$$= \bigcup \left\{ p(\mathcal{U}) : p(x) = tp(\sigma/A),\ \varphi(\sigma) \right\}$$



$p(x) \to \varphi(x)$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ esiste $\psi(x) \in \{\wedge\}p$

tale che $\psi(x) \to \varphi(x)$

$$\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee \left\{ \psi(x) : \psi(x) \in L(A),\ \psi(x) \to \varphi(x) \right\}$$

$\leftarrow$ ovvio perché $\psi(x) \to \varphi(x)$

$\rightarrow$ segue da $(*)$

$$\neg \varphi(x) \leftrightarrow \cancel{\bigvee}\bigwedge \left\{ \neg \psi(x) : \psi(x) \in L(A),\ \psi(x) \to \varphi(x) \right\}$$

per compattezza

$$\neg \varphi(x) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \psi_i(x) \quad \text{con } \psi_i \in L(A)$$

$$\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x) \quad \text{con } \psi_i \in L(A) \quad \square$$

Dim (alternativa) scriviamo $\varphi(x)$ come $\varphi(x;a)$ dove $a \in \mathcal{U}^{z}$ e $\varphi(x;z) \in L$

usiamo che $f[\varphi(\mathcal{U},a)] = \varphi(\mathcal{U},fa)$ per ogni $f \in Aut(\mathcal{U}/A)$ quindi

per ipotesi ① $\varphi(\mathcal{U},a) = \varphi(\mathcal{U},b)$ per ogni $a \equiv_A b$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,b) \quad \text{per ogni } b \models p(z) = tp(a/A)$$

quindi $\quad p(z) \longrightarrow [\varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,z)]$ per compattezza esiste $\psi(z) \in p$

tale che $\quad \psi(z) \longrightarrow [\varphi(x,a) \leftrightarrow \varphi(x,z)]$ da questo segue che

$$\varphi(x,a) \longleftrightarrow \exists z\, [\psi(z) \wedge \varphi(x,z)] \in L(A)$$

$\square$

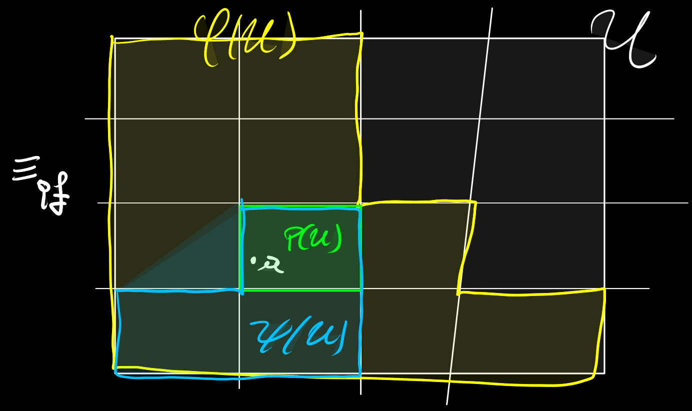
Proposizione $\varphi(x) \in L$ LSASE

① $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$ per ogni $a \equiv_{qf} b$

② esiste $\psi(x) \in L_{qf}$ tale che $\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x)$

Dim ② ⇒ ① ovvio

① ⇒ ② $\quad \varphi(\mathcal{U}) = \bigcup \{ p(\mathcal{U}) : p(x) = \text{qf-tp}(a),\ \varphi(a) \}$



$p(x) \to \varphi(x) \overset{\circledast}{\Longrightarrow}$ esiste $\psi(x) \in \{\,i\,\}p$ tale che $\psi(x) \to \varphi(x)$

$\leftarrow$ ovvia perché $\psi(x) \to \varphi(x)$

$$\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee \{ \psi(x) : \psi(x) \in L_{qf},\ \psi(x) \to \varphi(x) \}$$

$\to$ segue da $\circledast$

$$\neg\varphi(x) \leftrightarrow \cancel{\bigwedge} \{ \neg\psi(x) : \psi(x) \in L_{qf},\ \psi(x) \to \varphi(x) \}$$ per compattezza

$$\neg\varphi(x) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\psi_i(x) \quad \text{con } \psi_i \in L_{qf}$$

$$\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x) \quad \text{con } \psi_i \in L_{qf} \qquad \square$$

Lemma $p(x;z) \in L(A)$ allora $\exists z\, p(x;z)$ è equivalente ad un tipo su A

$[\, a \models \exists z\, p(x;z) \iff \text{esiste } b \in \mathcal{U}^z \text{ t.c. } a,b \models p(x;z) \,]$

Dim

$\exists z\, p(x;z) \longleftrightarrow \left\{ \exists z\, \varphi(x;z) : \varphi(x,z) \in \{1\} p \right\} = q(x)$

$\longrightarrow$ ovvio

verifichiamo che $p(x,z)$ è fin. consistente

assumiamo $a \models q(x)$

sia $\varphi_i(x,z) \in p$ $\quad \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x,z) \in q(x)$ $\quad a \models q(x)$ quindi $\exists z \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(a,z)$

quindi esiste $b \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(a,b)$. $\square$

Proposizione $p(x) \subseteq L(B)$ LSASE

1. $p(\mathcal{U})$ è invariante su A
2. esiste $q(x) \in L(A)$ tale che $q(x) \longleftrightarrow p(x)$

Dim scriviamo $p(a)$ come $p(x;a)$ dove $p(x;z) \in L$ e $a \in A^{z}$

OSS $f[p(\mathcal{U},a)] = p(\mathcal{U}, fa)$ per ogni $f \in Aut(\mathcal{U}/A)$ per ①

Sia $q(z) = tp(a/A)$

$$p(\mathcal{U},a) = p(\mathcal{U},b) \quad \text{per ogni } a \equiv_A b$$

$$p(\mathcal{U};a) = \bigcup_{b \equiv_A a} p(\mathcal{U};b)$$

$$p(x;a) \leftrightarrow \bigvee_{b \equiv_A a} p(x,b)$$

$$\leftrightarrow \exists z \left[q(z) \wedge p(x,z) \right] \quad \square$$