

Contesto U , $|U| = \kappa$

Fatto $p(x) \in L(A)$, $|x| < \omega$, allora vale una delle seguenti.

- ① $p(U)$ finito ② $|p(U)| = \kappa$

Dim $\neg$ ① e $\neg$ ② per assurdo. $q(x) = p(x) \cup \{x \neq b : b \in p(U)\}$

Se $p(U)$ è infinito $q(x)$ è fin. cons. $\checkmark$

$\uparrow$ Per ② questo è "piccolo"

Domanda: Due obblioni uno $|x| < \omega$?

Definizione $\varphi(x) \in L(U)$ è algebrica se $\varphi(U)$ finito $|x| < \omega$

$\varphi(x) \in L(A)$ è algebrica se $\varphi(U)$ finito

$a \in U$ è algebrico su A se $\varphi(a)$ per qualche $\varphi(x) \in L(A)$ algebrico

$\text{acl } A = \{a \in U : a \text{ algebrico su } A\}$

oss. $|\text{acl } A| \leq |L(A)|$

Definizione $a \in U$ definibile su A se esiste $\varphi(x) \in L(A)$ tale che $\varphi(a) \wedge \exists x \varphi(x)$

$dcl A = \{a \in U : a \text{ definibile su } A\}$ OSS $\langle A \rangle_U \subseteq dcl A \subseteq acl A$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 SOTTOSTRUTTURE DI U

FATTO ① LSASE ① $p(x) \in L(A)$ è algebrica ② esiste $\psi(x) \in \{1\}^P$ algebrica
 ③ esiste $\psi(x) \in \{1\}^P$ $\psi(x) \leftrightarrow p(x)$

Dim ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ① ovvio. Mostriamo ① $\Rightarrow$ ③. $p(x) = \{b_1, \dots, b_m\}$

$p(x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^m b_i = x$ per compattezza esiste $\psi(x) \in \{1\}^P$ tale che

$\psi(x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^m b_i = x$ chiaramente vale anche $\psi(x) \leftarrow \bigvee_{i=1}^m b_i = x$ $\square$

FATTO ② LSASE ① $a \in dcl(A)$ ② $O(a/A) = \{f \circ : f \in \text{Aut}(U/A)\} = \{a\}$

Dim ① $\Rightarrow$ ② banale Mostriamo ② $\Rightarrow$ ① usiamo l'omogeneità di U

$\mathcal{O}(R/A) = P(U)$ dove $P(x) = \text{tp}(R/A)$ quindi $P(U) = \{e\}$ per Fatto ①

esiste $\varphi(x) \in P$ tale che $\varphi(e) \wedge \exists x^1 \varphi(x)$ $\square$

Teorema ③ LSASE ① $e \in \text{acl } A$ ② $\mathcal{O}(R/A)$ finito ③ $e \in M$ per ogni $M \models A$

Dim ① $\Rightarrow$ ② banale ① $\Rightarrow$ ③ (quasi) banale segue dal fatto che

$\varphi(M) = \varphi(U)$ per ogni $\varphi(x) \in L(A)$ algebrica e $M \models A$. Vale perché

$x \in \exists x^{\leq m} \varphi(x)$ allora $M \models \exists x^{\leq m} \varphi(x)$ però $\varphi(M) \subseteq \varphi(U)$ per elementarità

② $\Rightarrow$ ① $\mathcal{O}(R/A)$ è finito siccome $\mathcal{O}(R/A) = P(U)$

$P(x) = \text{tp}(R/A)$ per Fatto 1 esiste $\varphi(x) \in P$ tale che $\varphi(x) \leftrightarrow P(x)$

$\varphi(x) \in L(A)$ algebrica e vale $\varphi(e)$ quindi $e \in \text{acl } A$

② $\Rightarrow$ ③ $\mathcal{O}(R/A)$ è finito siccome $\mathcal{O}(R/A) = P(U)$ che $|\mathcal{O}(R/A)| = \kappa$

per M arbitrario, esiste $f \in \text{Aut}(U/A)$ tale che $f \in M$ quindi
 $a \notin f^{-1}[M]$ ma è facile verificare che $f^{-1}[M]$ è un modello $\square$

Remark

11.4 Corollary For every $A \subseteq U$ and every $a \in U$

1. if $a \in \text{acl} A$ then $a \in \text{acl} B$ for some finite $B \subseteq A$

2. $A \subseteq \text{acl} A$

3. if $A \subseteq B$ then $\text{acl} A \subseteq \text{acl} B$

4. $\text{acl} A = \text{acl}(\text{acl} A)$

5. $\text{acl} A = \bigcap_{A \subseteq M} M$

$$\text{acl}(\text{acl} A) = \bigcap_{\text{acl} A \subseteq M} M = \bigcap_{A \subseteq M} M = \text{acl} A$$

finite character

extensivity

monotonicity

idempotency

Fall Se $f \in \text{Aut}(U)$ $f[\text{acl} A] = \text{acl}(f[A])$

Dim $a \in \text{acl} A$, sia $\varphi(x, z) \in L$ $b \in A^z$ tale che $\varphi(a, b) \wedge \bigwedge_{a' \in A} \varphi(a', b)$

$\varphi(fa, fb) \wedge \bigwedge_{a' \in fA} \varphi(a', fb)$ fb è algebrico su fA $\square$

Def M struttura $\forall$ $\in$ ∞ minimale se per ogni $\varphi(x) \in L(M)$, $|x|=1$
 $\varphi(M)$ è finito o cofinito.

Esempio $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ minimale per se stessa $M \geq \langle \mathbb{N}, < \rangle$
 può anche prendere $a \in M$ $a > \mathbb{N}$ e considerare $\varphi(x) = x < a$ $\square$

Def^① M struttura $\forall$ $\in$ ∞ fortemente minimale se per ogni $N \equiv M$
 $\varphi(x) \in L(N)$, $|x|=1$ $\varphi(N)$ è finito o cofinito.

NON HA MODELLI FINITI

Def^② T teoria fortemente minimale $\forall$ se per ogni $\varphi(x, z) \in L$, $|x|=1$, esiste $n < \omega$
 $T \vdash \forall z \left[\exists^{< n} x \varphi(x, z) \vee \exists^{< n} x \neg \varphi(x, z) \right]$

Teorema LSASE ① $Th(M)$ è fortemente minimale (Def²)

② M è fortemente minimale (Def')

③ esiste $N \geq M$ ω -saturo minimale

Dim ① $\Rightarrow$ ② chiaro ② $\Rightarrow$ ③ per definizione. Mostriamo ③ $\Rightarrow$ ① [① $\Rightarrow$ ③]

sappiamo esiste $\varphi(x, z) \in L$ tale che per ogni n

$$Th(M) \not\models \forall z \left[\exists^{\leq n} x \varphi(x, z) \vee \exists^{\leq n} x \neg \varphi(x, z) \right]$$

$$\ast \quad M \models \exists z \left[\exists^{> n} x \varphi(x, z) \wedge \exists^{> n} x \neg \varphi(x, z) \right]$$

$$\text{quindi} \quad q(z) = \left\{ \exists^{> n} x \varphi(x, z) \wedge \exists^{> n} x \neg \varphi(x, z) : n \in \omega \right\}$$

* Sia che $q(z)$ è finitamente contenuta. Quindi $N \models \exists z q(z)$

$N, k \models p(z)$ questo mostra che $\varphi(N, k)$ e $\neg \varphi(N, k)$ sono infiniti (73) $\square$

Esempi (1) $L = \emptyset$ Teoria dell'intero infinito
 (2) DAG $\rightarrow$ Spazi vettoriali su un corpo F
 (3) ACF

Completare di
 Zilber

Hrushovski

Esercizio $\{\varphi(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U}\}$ infinita $\Rightarrow |\{\varphi(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U}\}| = \kappa$
 (1) (2)

^{per ogni a come (1) e (2)}
 Soluzione no A tale che $\{\varphi(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U}\} = \{\varphi(\mathcal{U}, a) : a \in A\}$

$q(z) = \left\{ \neg \forall x [\varphi(x, a) \leftrightarrow \varphi(x, z)] : a \in A \right\}$ $\wedge$ Piccolo

se $\{\varphi(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U}\}$ infinita $q(z)$ fin. cons. $q(z)$ non è realizzabile in $\mathcal{U}$ $\square$

Esercizio mostrare che:

$$\rho(x, z) \subseteq L$$

$$\underbrace{\{\rho(u, a) : a \in \mathcal{U}\}}_{\textcircled{1}} \text{ infinite} \Rightarrow \underbrace{|\{\rho(u, a) : a \in \mathcal{U}\}|}_{\textcircled{2}} = \kappa$$

□