Lezione 12 giovedì 27 novembre 2024

T completa fortemente minimale

<u>Principio dello scambio</u> $a, b \notin \mathrm{acl} A \Rightarrow [a \in \mathrm{acl}(A,b) \Leftrightarrow b \in \mathrm{acl}(A,a)]$

<u>Dim</u> $a, b \notin \mathrm{acl} A$, $a \in \mathrm{acl}(A,b)$ mostriamo che $b \in \mathrm{acl}(A,a)$.

$\varphi(a,b) \wedge \exists^{\leq n}_x \varphi(x,b)$ per qualche $\varphi(x,z) \in L(A)$

Assumiamo per assurdo $b \notin \mathrm{acl}(A,a)$. Allora $\varphi(a,z) \wedge \exists^{\leq n}_x \varphi(x,z)$ non è algebrica.

(T f.m.) $\varphi(a,z) \wedge \exists^{\leq n}_x \varphi(x,z)$ è co-algebrica. Sia $M \supseteq A$ arbitrario $|M| \geq \omega$

quindi esiste $c \in M$ tale che $\varphi(a,c) \wedge \exists^{\leq n}_x \varphi(x,c)$. Quindi $a \in \mathrm{acl}(A,c) \subseteq M$

quindi $a \in M$. Quindi $a \in M$ per ogni $M \supseteq A$. $a \in \mathrm{acl} A$ ↯ $\square$

<u>Def</u> a è indipendente da A se $a \notin \mathrm{acl} A$

$b \notin \mathrm{acl}(B \setminus b)$ spesso omesse

B è un insieme indipendente se ogni $b \in B$ è indipendente da $B \setminus \{b\}$

$B \subseteq C$ è una base di C se è un insieme indipendente e $C \subseteq \mathrm{acl}(B)$.

$\dim C = \min\{|A| : A \text{ base di } C\} = \min\{|A| : A \subseteq C \text{ indipendente } C \subseteq \mathrm{cl}\, A\}$

Lemma ① B insieme indipendente $a \notin \mathrm{cl}\, B$ allora B, a è anche insieme ind.

Dim Per assurdo. Se B, a è non insieme indipendente. Esiste $b \in B$

Tale che $b \in \mathrm{cl}[(B \setminus b), a]$. Vale

$$a, b \notin \mathrm{cl}\, B \setminus b \underset{\text{SCAMBIO}}{\Rightarrow} \Big[\underbrace{a \in \mathrm{cl}\, B}_{\text{VERO}} \iff \underbrace{b \in \mathrm{cl}[(B \setminus b), a]}_{\text{VERO}} \Big] \quad \lightning \quad \square$$

Corollario BASE ① B base di C ② $B \subseteq C$ massimale indipendente

Dim ① $\Rightarrow$ ② dobbiamo mostrare $B \subseteq C$ ✓ massimale indipendente ✓

↑ se non fosse esisterebbe $a \in C$ tale che

B, a indipendente siccome B base

$a \in C \subseteq \mathrm{cl}\, B$ $\lightning$

② $\Rightarrow$ ① dobbiamo mostrare $B \subseteq C$ indipendente $C \subseteq cl\, B$

se non fosse $a \in C \setminus cl\, B$ allora per Lemma ① Ba indipendente che contraddice massimalità ↯

Teorema dato C allora

① ogni $B \subseteq C$ indipendente si estende ad una base

② Tutte le basi di C hanno la stessa card.

Dim ① segue da Lemma ① + Lemma di Zorn

② siano $A, B \subseteq C$ due basi. Per assurdo $|A| < |B|$ siccome $A \subseteq cl\, B$

Assumiamo $|B| \geq \omega$

posso scegliere per ogni $a \in A$ un insieme finito $B_a \subseteq B$ tale che $a \in cl\, B_a$.

allora $A \subseteq cl\left(\bigcup_{a\in A} B_a\right) \subseteq B$

$\left|\bigcup_{a\in A} B_a\right|$ $<\omega$ se A finito, $\leq |A|$

$\bigcup_{a\in A} B_a \subsetneq B$ ma $\bigcup_{a\in A} B_a$ è una base ↯

Caso $|B| = n < \omega$. Tra tutte le coppie A, B $|A| < n$ e $|B| \geq n$ scelgo una che minimizza $|B \setminus A|$. Sia $b \in B \setminus A$. Sia B' indipendente tale che $B \setminus b \subseteq B' \subseteq B \setminus b, A$ e B' base di $B \setminus b, A$.

(quindi B' anche base di C) $|B'| \geq n$ $B' \setminus A \subseteq B \setminus b \setminus A \subsetneq B \setminus A$

$|B' \setminus A| < |B \setminus A|$

Lemma k mappa elementare piccola $b \notin \mathrm{acl}(\mathrm{dom}\, k)$ $c \notin \mathrm{acl}(\mathrm{range}\, k)$ allora $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è elementare.

Dim a enumera dom k, dobbiamo mostrare che $\varphi(a, b) \iff \varphi(ka, c)$ per ogni $\varphi(x\, y) \in L$. Assumo $\varphi(a, b)$ quindi $\varphi(a, y)$ non è algebrica (T fm)

$\varphi(a, y)$ co algebrica quindi anche $\varphi(ka, y)$ è co-algebrica quindi $\varphi(ka, c)$ perché $c \notin \mathrm{acl}(ka)$

Corollario ogni biiezione tra insiemi indipendenti è una mappa elementare

$\varphi(x,y)$ ω-algebrica

$\exists^{\leq n}_y \neg\varphi(x,y) \overset{\text{kel.}}{\Longrightarrow} \exists^{\leq n}_y \neg\varphi(kx,y)$

Corollario M, N con la stessa dimensione allora $M \simeq N$.

Dim siano A, B basi di M, N e sia $f[A]=B$ biiezione quindi elementare

si $h \in Aut(\mathcal{U})$, $h \supseteq f$. Per il lemma di ieri $[h(\text{acl} A) = \text{acl}\, hA]$

$h[M] = N$ $\square$

Corollario $|L| < \lambda$ T è λ-categorica

Dim basta verificare che se $|M| > |L|$ allora $\dim M = |M|$

Esercizio $|N| \geq |L|$ LSASE ① N è saturo ② $\dim N = |N|$

① $\Rightarrow$ ② sia $A \subseteq N$, $|A| < |N|$ mostriamo che $N \neq \operatorname{acl} A$

$p(x) = \{\neg\varphi(x) : \varphi(x) \in L(A) \text{ algebrica}\}$ fin. cons. per saturazione esiste $b \in N \models p(b)$

ma $b \notin \operatorname{acl} A$.

② $\Rightarrow$ ① mostriamo che N è ricco (morfismi = m.el.). $k : M \xrightarrow{el.} N$, $|k| < |N|$

$b \in M$ vogliamo $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : M \xrightarrow{el.} N$.

possiamo assumere che $\operatorname{dom} k = \operatorname{acl}(\operatorname{dom} k)$ quindi se $b \in \operatorname{dom} k$ prendo $c = kb$

$\operatorname{range} k = \operatorname{acl}(\operatorname{range} k)$

altrimenti prendo $c \in N$ $c \notin \operatorname{acl}(\operatorname{ran} k)$ questo esiste perché $|k| < |N| = \dim N$.

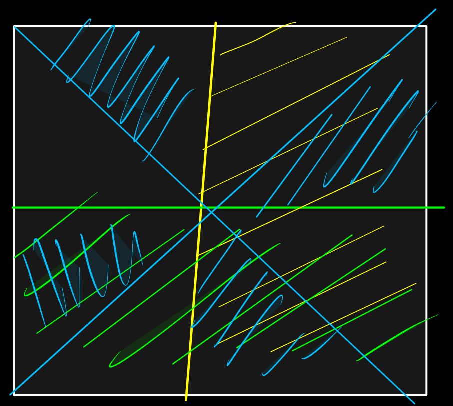
$\square$

Controesempio esercizio

$$\left|\left\{ p(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U} \right\}\right| \geq \omega \Rightarrow \left|\left\{ p(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U} \right\}\right| = \kappa$$

Vogliamo trovare $e(x,y)$ che definisce una rel. eq. su $\mathcal{U}$ con 2^ω classi

$L = \{ E_n : \text{relazioni linearie} \}$



$E_n(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ ha due classi infinite

E_{n+1} spezza in 2 pezzi infiniti le classi di $\bigwedge_{i=0}^{n} E_i$.

$$e(x,y) = \bigwedge_{i \in \omega} E_i(x,y)$$

$$\left|\left\{ e(\mathcal{U}, a) : a \in \mathcal{U} \right\}\right| = 2^\omega$$