# Esercizi su ricorsività e modelli del'aritmetica

22 ottobre 2024

**Notazione.** Dato $1 \leq i \leq 7$, indichiamo con $Q_{-i}$ la teoria che si ottiene sostituendo l'assioma (Q i) con la sua negazione nell'aritmetica di Robinson $Q$.

Gli esercizi seguenti mostrano in particolare che ciascun assioma di $Q$ è indipendente dai rimanenti, ovvero non è né dimostrabile né refutabile a partire da essi.

1. Si consideri la $L_Q$-struttura $M_1$ con dominio $\{0,1\}$ e tale che per ogni $x, y$
   - $x +^{M_1} y = \max\{x, y\}$;
   - $x \cdot^{M_1} y = x \cdot y = \min\{x, y\}$;
   - $S^{M_1}(x) = 1$;
   - $0^{M_1} = 0$.

   Dimostrare che $M_1 \models Q_{-1}$. Concludere che (Q1) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

2. Dimostrare che se $M \models$ (Q2) allora $|M| \geq 2$ e che se $M \models Q_{-1}$ con $|M| = 2$ allora $M$ è isomorfo a $M_1$.

3. Dato un qualunque ordinale $\alpha \geq 3$, consideriamo la $L_Q$-struttura $M_1'$ con dominio $\alpha$ e tale che per ogni $x, y$
   - $x +^{M_1'} y = \max\{x, y\}$;
   - $x \cdot^{M_1'} 0 = 0$ e $x \cdot^{M_1'} y = x$ se $y \neq 0$;
   - $S^{M_1'}(0) = 1$ e $S^{M_1'}(x) = x$ per ogni $x \neq 0$;
   - $0^{M_1'} = 0$.

   Dimostrare $M_1' \models Q_{-1}$. Concludere che per ogni cardinale $\kappa \geq 3$ esistono modelli di $Q_{-1}$ di taglia $\kappa$ non isomorfi tra loro.[1]

4. Consideriamo il campo di Galois $GF(2)$ con due elementi (alternativamente: l'anello quoziente $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), visto come $L_Q$-struttura $M_2$: $+$, $\cdot$ e $0$ vengono interpretati nella maniera usuale (in particolare, la somma è modulo 2), mentre $S$ viene interpretato nella funzione $x \mapsto x +^{M_2} 1$. Dimostrare che $M_2 \models Q_{-2}$. Concludere che anche (Q2) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$. Esistono altri modelli di $Q_{-2}$ con due soli elementi? Esistono modelli di $Q_{-2}$ più piccoli?

5. Sia $X$ un insieme arbitrario non vuoto, $a \in X$ e $f \colon X^2 \to X$ una qualunque funzione binaria tale che $f(x, a) = a$ per ogni $x \in X$. Sia $M_2'$ la $L_Q$-struttura con dominio $X$ e tale che per ogni $x, y \in X$

[1] Questo fornisce una dimostrazione alternativa, usando questa volta modelli potenzialmente infiniti, del fatto che (Q1) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

- $x +^{M_2'} y = x$;
- $x \cdot^{M_2'} y = f(x, y)$;
- $S^{M_2'}(x) = x$;
- $0^{M_2'} = a$.

Dimostrare che $M_2' \models Q_{-2}$. Concludere che $Q_{-2}$ ha modelli di taglia arbitraria e che per ciascun cardinale $\kappa \geq 2$ esistono modelli di $Q_{-2}$ di taglia $\kappa$ non isomorfi tra di loro.

6. Si consideri la $L_Q$-struttura data da $\mathbb{Z}$ con le interpretazioni naturali dei simboli di $L_Q$ (in particolare il simbolo $S$ viene interpretato nella funzione $z \mapsto z + 1$). Dimostrare[2] che anche tale struttura è un modello di $Q_{-2}$.

7. Dimostrare che se $M \models (\mathrm{Q}1) \wedge (\mathrm{Q}2)$ allora $M$ è infinito.[3]

   [*Suggerimento.* Argomentare che le interpretazioni in $M$ di $\overline{n}$ e $\overline{m}$ sono differenti se $n \neq m$.]

8. Dimostrare che la $L_Q$-struttura $M_3 = \langle \omega^\omega, +, \cdot, S, \emptyset \rangle$, dove tutti i simboli di $L_Q$ vengono interpretati come le usuali operazioni sull'ordinale $\omega^\omega$, è un modello di $Q_{-3}$. Concludere che (Q3) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

9. Più in generale, dimostrare che se $\alpha > \omega$ è un ordinale moltiplicativamente chiuso[4] allora la $L_Q$-struttura $\langle \alpha, +, \cdot, S, 0 \rangle$ è un modello di $Q_{-3}$.

10. Sia $M_4$ la $L_Q$-struttura con dominio $\mathbb{N}$ dove $S, 0$ vengono interpretati nella maniera usuale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

    - $x +^{M_4} y = y$;
    - $x \cdot^{M_4} 0 = 0$ e $x \cdot^{M_4} y = x$ se $y \neq 0$.

    Dimostrare che $M_4 \models Q_{-4}$ e concludere che (Q4) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

11. Sia $M_5$ la $L_Q$-struttura con dominio $\mathbb{N}$ dove $S, 0$ vengono interpretati nella maniera usuale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

    - $x +^{M_5} y = x$;
    - $x \cdot^{M_5} y = 0$ .

    Dimostrare che $M_5 \models Q_{-5}$ e concludere che (Q5) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

12. Sia $M_6$ la $L_Q$-struttura con dominio $\mathbb{N}$ dove $+, S, 0$ vengono interpretati nella maniera usuale e $x \cdot^{M_6} y = x(y + 1)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $M_6 \models Q_{-6}$ e concludere che (Q6) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

13. Sia $M_7$ la $L_Q$-struttura con dominio $\mathbb{N}$ dove $+, S, 0$ vengono interpretati nella maniera usuale e $x \cdot^{M_7} y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $M_7 \models Q_{-7}$ e concludere che (Q7) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

[2]Questo fornisce una dimostrazione alternativa, usando questa volta un modello infinito, del fatto che (Q2) è indipendente dagli altri assiomi di $Q$.

[3]Questo fatto va contrastato con gli esercizi precedenti, in cui di dimostra che se si omette (Q1) oppure (Q2) da $Q$ allora si possono anche avere modelli finiti.

[4]Un ordinale $\alpha$ si dice moltiplicativamente chiuso se per ogni $\beta, \gamma < \alpha$ si ha $\beta \cdot \gamma < \alpha$. Gli ordinali moltiplicativamente chiusi sono tutti e soli quelli della forma $\omega^{\omega^\delta}$ per qualche ordinale $\delta$. Si noti che un ordinale $\alpha$ moltiplicativamente chiuso è anche additivamente chiuso, ovvero $\beta + \gamma < \alpha$ per ogni $\beta, \gamma < \alpha$.

14. Dimostrare che la proprietà di "essere un numero standard" non è formalizzabile al prim'ordine, ovvero non esiste alcuna $L_Q$-formula $\varphi(x)$ tale che per ogni $M \models Q$ e $q \in M$ si abbia $M \models \varphi[q]$ se e solo se $q$ è un numero standard di $M$.

15. Sia $L_Q = \{+, \cdot, S, 0\}$ il linguaggio dell'aritmetica di Robinson.

    (a) Si considerino le operazioni $\overline{+}$ e $\bar{\cdot}$ su $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definite da:

    $$x \,\overline{+}\, y = \begin{cases} x+y & \text{se } x, y \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x \,\bar{\cdot}\, y = \begin{cases} x \cdot y & \text{se } x, y \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

    Definire un'operazione unaria $\overline{S} \colon \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in maniera tale che la $L_Q$-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \overline{+}, \bar{\cdot}, \overline{S}, 0 \rangle$ sia un modello dell'aritmentica di Robinson $Q$, verificando esplicitamente che gli assiomi (Q1)–(Q7) valgono sulla parte non standard di $\mathcal{A}$. È vero che $\mathcal{A} \models \forall x \, \neg(x = S(x))$?

    (b) Argomentare che l'enunciato $\forall x \, \neg(x = S(x))$ è indipendente da $Q$, ovvero che non è né dimostrabile né refutabile a partire da $Q$.

    (c) Dimostrare che $PA \vdash \forall x \, \neg(x = S(x))$, utilizzando il corrispondente assioma di induzione.

16. Trovare un modello (nonstandard) $M$ di $Q$ la cui "somma" $+^M$ non sia commutativa.

17. Dimostrare che $PA \vdash \forall x \forall y \, (x+y = y+x)$ (ovvero $PA$ dimostra che la somma è commutativa).

    [*Suggerimento.* Applicare l'assioma di induzione $\mathrm{Ind}_{\varphi,x}$ dove $\varphi$ è la formula $\forall y \, (x+y = y+x)$, dopo aver dimostrato $\forall y \, (0+y = y)$ e $\forall y \, (S(x)+y = S(x+y))$ utilizzando i corrispondenti assiomi di induzione (relativamente alla variabile $y$).]

18. Dimostrare che per ogni $0 \neq k \in \mathbb{N}$, la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}^k$ rappresentabili in $Q$ è un'algebra di Boole.

19. Dimostrare che per qualunque $L_Q$-teoria $T$ e qualunque $0 \neq k \in \mathbb{N}$ ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}^k$ che non sono rappresentabili in $T$.

    [*Suggerimento.* Quanti sono i sottoinsiemi rappresentabili in $T$?]

20. Dare un esempio di una teoria $T \supseteq Q$ che sia coerente e completa ma non $\omega$-coerente.

    [*Suggerimento.* Può essere utile considerare un opportuno modello non-standard di $Q$.]