1 GEOMETRIA SUPERIORE 21/3/12

L1

X spazio topologico

Def Un PREFASCIO $\mathcal{F}$ di gruppi su X è il dato di:

1) un gruppo $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$

2) per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$, un omomorfismo $\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$

con le proprietà:

(i) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$

(ii) $\forall U \subseteq X$ aperto $\rho^U_U = Id_{\mathcal{F}(U)}$

(iii) $\forall W \subseteq V \subseteq U$ aperti si ha

$$\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$$

- gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ si dicono SEZIONI di $\mathcal{F}$ su U
- gli elementi di $\mathcal{F}(X)$ si dicono SEZIONI GLOBALI
- gli omomorfismi ρ^U_V si dicono spesso OMOMORFISMI DI RESTRIZIONE, e scriviamo anche $\rho^U_V(s) = s_{|V} \in \mathcal{F}(V)$.

Allo stesso modo si definisce un prefascio di anelli, spazi vett., algebre ....

ESEMPI:

1) $\mathcal{F}(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \}$ funzioni a valori reali

(fascio di $\mathbb{R}$-algebre)

$\mathcal{C}(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$

2) Se X è una varietà differenziabile:

$\mathcal{C}^\infty(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^\infty \}$ (prefascio di $\mathbb{R}$ algebre)

$\mathcal{A}^p(U) = \{ p\text{-forme } \mathcal{C}^\infty \text{ su } U \}$ prefascio di $\mathbb{R}$-spazi vett.

Def (assioma di fascio).

Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X.

Diciamo che $\mathcal{F}$ è un FASCIO se:

$\forall U \subseteq X$ aperto e

$\forall \{U_i\}$ ricoprimento aperto di U,

data una collezione di sezioni $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$

t.c. $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j$

(in $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$)

allora: $\exists !\, s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s|_{U_i} = s_i$

$\forall i$.

Nota: l'assioma di fascio ha 2 parti:

- esistenza
- unicità

L'unicità si può esprimere anche come:

se $s \in \mathcal{F}(U)$ è t.c. $s_{|U_i} = 0 \ \forall i$,
allora $s = 0$.

ESEMPI:

1) il fascio delle funzioni a valori reali:
$$\mathcal{F}(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \}$$

2) il fascio ~~delle~~ $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}$ delle funzioni continue

3) Se X è una varietà differenziabile:
- il fascio $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty_X$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su X
- il fascio $A^p = A^p_X$ delle p-forme diff. $\mathcal{C}^\infty$ su X $\quad (A^0 = \mathcal{C}^\infty)$

4) Se X è una varietà diff. e
$\pi : E \to X$ è un fibrato vett. (reale)
allora poniamo
$$\mathcal{F}(U) := \{ \text{sezioni } \mathcal{C}^\infty \text{ di } E \text{ su } U \}$$
$$= \{ s : U \to E \text{ di classe } \mathcal{C}^\infty \text{ t.c. } \pi \circ s = id_U \text{ cioè: } s(x) \in E_x \ \forall x \in U \}$$

Fascio delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di E

($\mathcal{A}^p_X$ è il fascio delle sezioni C^∞ di $\bigwedge^p T^*_X$)

<u>OSS</u> Dato un fascio $\mathcal{F}$, un sotto prefascio ~~di un~~ $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ è un prefascio $\mathcal{G}$ t.c. $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$

In generale non è detto che $\mathcal{G}$ sia un fascio, infatti dati:

U aperto

$\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U

$s_i \in \mathcal{G}(U_i) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ t.c. $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i,j$

$\mathcal{F}$ fascio $\Rightarrow \exists !\, s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s|_{U_i} = s_i$

$s \in \mathcal{G}(U)$??

(l'unicità vale sempre).

<u>ESEMPI</u>:

5) X — aperto di $\mathbb{C}^n$ / varietà complessa

$\mathcal{O}_X(U) = \{ f: U \to \mathbb{C} \text{ olomorfa} \}$

$\mathcal{O}_X$ fascio delle funz. olomorfe (fascio di $\mathbb{C}$-algebre)

6) X varietà ~~q.a.~~ algebrica q.p. su k (5
(alg. chiuso)

$\mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to k \text{ regolari} \}$

$\mathcal{O}_X$ fascio delle funzioni regolari
(fascio di k-algebre)
(topologia di Zariski).

Esercizio: verificare che tutti gli esempi dati sono effettivamente dei fasci.

ES X spazio topologico
G gruppo

Consideriamo il prefascio delle funzioni costanti a valori in G:

$$\mathcal{F}(U) := \{ f : U \to G \ \underline{\text{costante}} \}.$$

- $\mathcal{F}(U) \cong G$. (se $U \neq \emptyset$)
- $\mathcal{F}$ è un prefascio rispetto alle restrizioni ovvie.
- $\mathcal{F}$ non è un fascio infatti: dati due aperti U_1, U_2 disgiunti: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e $g_1, g_2 \in G$ distinti

$$f_1 : U_1 \to G \quad \text{costante in } g_1$$
$$f_2 : U_2 \to G \quad \text{costante in } g_2$$

$$f_{1|U_1 \cap U_2} = f_{2|U_1 \cap U_2} \quad \text{(banale}$$

ma: $\nexists\, f : U_1 \cup U_2 \to G$ costante che si restringe a f_1 e f_2.

ES Fasci localmente costanti:

G gruppo $(\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

~~Il fascio~~ Denotiamo con $\underline{G}$ il fascio delle funzioni LOCALMENTE costanti a valori in G:

$$\underline{G}(U) = \{ f : U \to G \text{ localm. costante} \}$$

f è localmente costante se $\forall p \in U$ $\exists V \subseteq U$ intorno aperto di p t.c. $f_{|V}$ è costante

ES. $\Leftrightarrow$ f è costante sulle componenti connesse del dominio.

ES Fasci GRATTACIELO.

X spazio topologico

G gruppo

$p \in X$ fissato

Definiamo un fascio G_p ponendo:

$$G_p(U) = \begin{cases} G & \text{se } p \in U \\ \{0\} & \text{se } p \notin U \end{cases}$$

(fascio grattacielo concentrato nel pto p).

Le restrizioni sono: id, mappe nulle

Morfismi di (pre)fasci.

Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due prefasci su X. Un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il dato di un omomorfismo

$$f_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

per ogni aperto $U \subseteq X$

t.c. se $V \subseteq U$ aperti di X, si abbia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Un morfismo di fasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è semplicemente un morfismo di prefasci

Oss Si definisce in maniera naturale la composizione di morfismi di (pre)fasci, che è ancora un morfismo di (pre)fasci.
Un ISOMORFISMO di (pre)fasci è un morfismo che ha un inverso.

ESEMPI:

1) Le inclusioni di sottofasci sono morfismi di fasci:

$$\underline{\mathbb{Z}} \subset \underline{\mathbb{R}} \subset \mathcal{C}_X$$

2) X varietà differenziabile

Il differenziale esterno

$$d : A^p_X \to A^{p+1}_X$$

è un morfismo di fasci:

$\forall U \subseteq X$ aperto

$$A^p(U) \to A^{p+1}(U)$$
$$\omega \longmapsto d\omega$$

3) Valutazione in un pto $p \in X$:

$$e_p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_p$$

funzioni continue $X \to \mathbb{R}$

fascio grattacielo concentrato in p

Se $U \subseteq X$ aperto si pone:

$$\cancel{e_{p|U} \in \mathcal{O}} \quad (e_p)_U : \mathcal{C}(U) \to \mathbb{R}_p(U)$$

$(e_p)_U = 0$ se $p \notin U$

se $p \in U$: $(e_p)_U(f) = f(p) \in \mathbb{R}$.

4) Ricordiamo che $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olomorfa

~~Dato~~ $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto

e $f \in \mathcal{O}(U)$, allora $e^{f(z)} \in \mathcal{O}(U)$ sempre $\neq 0$.

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{e^z} \mathbb{C}$$

$\boxed{X = \mathbb{C}}$ Definiamo

$$\mathcal{O}_X^*(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe, sempre } \neq 0 \}.$$

· gruppo rispetto al prodotto

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}_X^*$ è un fascio di gruppi abeliani.

$$\exp_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X^*(U)$$
$$f(z) \longmapsto e^{f(z)}$$

· omomorfismo di gruppi, perché

$$e^{f_1(z) + f_2(z)} = e^{f_1(z)} \cdot e^{f_2(z)}$$

· questo dà un morfismo di fasci

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$$

($X = \mathbb{C}$, X aperto di $\mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^n$, X = aperto di $\mathbb{C}^n$, X varietà complessa.

<u>Spiga di un (pre)fascio in un punto.</u>

$\mathcal{F}$ prefascio su X

$p \in X$ fissato

Consideriamo: $S := \coprod_{\substack{p \in U \\ \text{aperto}}} \mathcal{F}(U)$

Mettiamo su S una relazione di equivalenza

$\sim$, ponendo:

$$f \in \mathcal{F}(U), \qquad g \in \mathcal{F}(V) \qquad p \in U \cap V$$

$f \sim g$ se $\exists W \subseteq U \cap V$ intorno aperto di p

t.c. $f_{|W} = g_{|W}$.

Esercizio: Verificare che questa è una rel. di equiv. su S.

$\mathcal{F}_p := S/_\sim$ è la SPIGA di $\mathcal{F}$ in p

. gli elementi di $\mathcal{F}_p$ si dicono GERMI di $\mathcal{F}$ in p

Notazione: se $f \in \mathcal{F}(U)$, $p \in U$

$[f]_p$ GERME di f in p

Se $g \in \mathcal{F}(V)$, $p \in V$ allora:

$[f]_p = [g]_p \iff f$ e g coincidono in un intorno aperto di p

$[f]_p = 0 \iff f$ è nulla in un intorno di p.

La spiga $\mathcal{F}_p$ è in maniera naturale un gruppo: dati $s_1, s_2 \in \mathcal{F}_p$, $\exists U$ intorno aperto di p ed esistono $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s_i = [f_i]_p$

$\Rightarrow$ poniamo $s_1 + s_2 := [\underbrace{f_1 + f_2}_{\in \mathcal{F}(U)}]_p$.

$\forall U$ intorno aperto di p abbiamo (11)
un omo di gruppi

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_p$$
$$f \longmapsto [f]_p .$$

<u>OSS</u> Se $\mathcal{F}$ è un <u>fascio</u> e $f \in \mathcal{F}(U)$, allora

$$f = 0 \iff [f]_p = 0 \quad \forall p \in U.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ sempre vera

$\boxed{\Leftarrow}$ $[f]_p = 0 \quad \forall p \in U$

$\Rightarrow \forall p \in U \ \exists U_p \subseteq U$ intorno aperto di p t.c. $f_{|U_p} = 0$ in $\mathcal{F}(U_p)$

$\xRightarrow{\text{ASSIOMA FASCIO}}$ $f = 0$ in $\mathcal{F}(U)$.

<u>Esempi</u>:

1) X varietà diff.

$\mathcal{C}^\infty_p$ = spiga dei germi di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in p.

2) X varietà topol. $\underline{\mathbb{R}}$ fascio localm. costante (a valori in $\mathbb{R}$)

$$\underline{\mathbb{R}}_p \cong \mathbb{R} \quad \forall p \in X.$$

3) X varietà top. Fascio grattacielo concentrato in $p \in X$ fissato a valori in $\mathbb{R}$:

la spiga in $q \in X$ sarà $\begin{cases} 0 & \text{se } q \neq p \\ \mathbb{R} & \text{se } q = p \end{cases}$

4) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ funzioni olomorfe, $X = \mathbb{C}$ (12)

$(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{a} \cong$ anello delle serie di potenze convergenti in $z-a$
$a \in \mathbb{C}$

<u>OSS</u> Se $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di (pre)fasci su X, $\forall p \in X$ abbiamo un omomorfismo tra le spighe:

$$\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$$
$$s = [f]_p \longmapsto [\varphi_U(f)]_p$$

$f \in \mathcal{F}(U) \rightsquigarrow \varphi_U(f) \in \mathcal{G}(U)$

U intorno aperto di p

Esercizio

Sia X uno spazio topologico.
Definiamo la categoria $\mathcal{A}_X$ degli aperti di X in questo modo:

- gli oggetti sono gli aperti di X
- dati due aperti U, V di X

$$\mathrm{Mor}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \not\subseteq V \\ \{i : U \hookrightarrow V\} & \text{se } U \subseteq V \end{cases}$$

1) verificare che $\mathcal{A}_X$ è una categoria
2) verificare che dare un prefascio $\mathcal{F}$ su X è equivalente a dare un

funtore controvariante

$$\mathcal{A}_X \longrightarrow \underline{Gr}$$

$$(\underline{Ab},\ \underline{\mathbb{R}\text{-vett}},\ \dots)$$

Esercizio: Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci di gruppi abeliani su X, mostrare che $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ è in maniera naturale un fascio di gruppi ab. su X, ponendo:

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

FASCIO ASSOCIATO A UN PREFASCIO.

Sia $\mathcal{F}$ un prefascio ~~...~~ su X.

Allora esiste un fascio $\mathcal{F}^+$ su X, con un morfismo

$$j : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+,$$

con le proprietà:

(1) per ogni fascio $\mathcal{G}$ su X, e per ogni morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\exists!\ \psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ morfismo t.c.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathcal{F}^+ \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & {} & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

(2) $\forall p \in X$ j induce un isomorfismo sulle spighe: $j_p : \mathcal{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+_p$.

- $\mathcal{F}^+$ si dice FASCIO ASSOCIATO al prefascio $\mathcal{F}$ (o fascificato di $\mathcal{F}$).

Esercizio: Mostrare che (1) implica che $(\mathcal{F}^+, j)$ è unico a meno di iso.

<u>Costruzione di $\mathcal{F}^+$</u>.

Sia $U \subseteq X$ aperto e consideriamo le funzioni $s : U \longmapsto \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p$

con le proprietà:

(1) $s(p) \in \mathcal{F}_p$ $\forall p \in U$

(2) $\forall p \in U$ $\exists V \subseteq U$ intorno aperto di p

$\exists f \in \mathcal{F}(V)$ t.c.

$\forall q \in V$ $s(q) = [f]_q$.

Questa è la definizione delle sezioni $s \in \mathcal{F}^+(U)$.