Fascio associato a un prefascio:

$\mathcal{F}$ prefascio su X spazio topologico

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}^+$ ~~pre~~fascio associato a $\mathcal{F}$

Se $U \subseteq X$ aperto

$$\mathcal{F}^+(U) = \{ s : U \longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p \mid$$

(1) $s(p) \in \mathcal{F}_p \quad \forall p \in U$

(2) $\forall p \in U \quad \exists V$ intorno aperto di p in U $\exists f \in \mathcal{F}(V)$ t.c.

$$s(q) = [f]_q \quad \forall q \in V.$$

Esercizio Verificare che $\mathcal{F}^+$ è un fascio.

$\forall U \subseteq X$ definiamo

$$j_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}^+(U)$$

$$f \longmapsto s_f : U \longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

$$p \mapsto [f]_p$$

$\rightsquigarrow$ otteniamo un morfismo di prefasci

$$j : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+.$$

OSS

1) j_U è iniettivo $\forall U \iff \mathcal{F}$ soddisfa l'assioma dell'unicità nell'assioma di fascio

$\leadsto \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^+$

$\Updownarrow$

$\forall U \subseteq X$ aperto
$\forall \{U_i\}$ ricoprimento di U
$\forall f \in \mathcal{F}(U)$
se $f_{|U_i} = 0 \ \forall i$
allora $f = 0$.

Infatti:
consideriamo U fissato
$\ker j_U \subseteq \mathcal{F}(U)$

$f \in \ker j_U \iff [f]_p = 0 \quad \forall p \in U$

$\iff \forall p \in U \ \exists \ V_p \subset U$ intorno aperto di p t.c. $f_{|V_p} = 0$ in $\mathcal{F}(V_p)$

2) j_U è suriettivo $\forall U \iff \mathcal{F}$ soddisfa l'assioma dell'esistenza nell'assioma di fascio

Verificare per esercizio.

3) j_U è isomorfismo $\forall U$ (j è isomorfismo tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^+$) (3)

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ è un fascio.

ES. $\mathcal{F}$ = prefascio delle funzioni <u>costanti</u> a valori in $\mathbb{R}$.

Allora $\mathcal{F}^+$ è il fascio delle funzioni <u>localmente</u> costanti a valori in $\mathbb{R}$.

Infatti: $\mathcal{F}_p \cong \mathbb{R}$ $\quad \forall p \in X$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}^+(U) = \{ s : U \to \mathbb{R} \mid \forall p \in U \ \exists V$ intorno aperto di p in U, $\exists f \in \mathcal{F}(V)$ t.c. $s(q) = [f]_q = \lambda$ ($f : V \to \mathbb{R}$ costante in λ)

cioè s è localmente costante $\}$

<u>Esercizio</u> Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di (pre)fasci.

Mostrare che φ è isomorfismo di (pre)fasci

$\Longleftrightarrow$ $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è isomorfismo di gruppi $\forall U \subseteq X$.

$\rightsquigarrow$ $j : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^+$ $\qquad$ $\mathcal{F}$ è contenuto in $\mathcal{F}^+$.

OSS Sia $\mathcal{F}$ un fascio e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un sotto-prefascio.

- $\mathcal{G}$ soddisfa sempre l'assioma di unicità

Allora il fascio $\mathcal{G}^+$ associato al prefascio $\mathcal{G}$ è naturalmente un sottofascio di $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{F}$$

$\forall\, U \subseteq X$ aperto

$$\mathcal{G}^+(U) = \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid [s]_p \in \mathcal{G}_p \ \forall p \in U \}$$

$$= \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid \forall p \in U \ \exists V \text{ intorno aperto di } p \text{ in } U,\ \exists g \in \mathcal{G}(V) \subseteq \mathcal{F}(V) \text{ t.c. } s_{|V} = g \}.$$

ES: X spazio topol.

$\mathcal{G}$ = prefascio delle funzioni costanti a valori in $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ = fascio delle funzioni a valori in $\mathbb{R}$

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^+ \subset \mathcal{F}$$

$\mathcal{G}^+ \hookrightarrow$ funzioni localm. costanti

Fascio nucleo.

Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci su X

e $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci.

Definiamo il FASCIO NUCLEO $\ker\varphi$ di φ ponendo:

$$(\ker\varphi)(U) := \ker\varphi_U$$

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

Prop $\ker\varphi$ è un sottofascio di $\mathcal{F}$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ • $\ker(\varphi_U)$ è un sottogruppo di $\mathcal{F}(U)$

e se $V \subseteq U$ si ha:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

il diagramma commuta perché φ è morfismo di fasci

$\Longrightarrow \rho^U_V(\ker\varphi_U) \subseteq \ker\varphi_V$

$\Longrightarrow \ker\varphi$ è un sottoprefascio di $\mathcal{F}$.

Verifichiamo che $\ker\varphi$ è un fascio.

Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di U

e $s_i \in (\ker\varphi)(U_i) \subseteq \mathcal{F}(U_i)\ \forall i$

t.c. $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}\ \forall i,j$.

$\mathcal{G}$ è un fascio $\Rightarrow \exists!\ s \in \mathcal{F}(U)$ t.c.
$s_{|U_i} = s_i \ \forall i$.

Vogliamo $s \in (\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U$, cioè:
$\varphi_U(s) = 0$ in $\mathcal{G}(U)$.

Abbiamo: $\varphi_U(s)_{|U_i} = \varphi_{U_i}(s_{|U_i}) =$
$= \varphi_{U_i}(s_i) = 0 \quad \forall i$

$\mathcal{G}$ fascio $\Rightarrow \varphi_U(s) = 0 \Rightarrow s \in \ker \varphi_U$.

<u>Esempi</u>:

1) X spazio topol. $\quad p \in X$

$\mathbb{R}_p$ fascio grattacielo concentrato in p

$$\underbrace{e_p : \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{continue}} \longrightarrow \mathbb{R}_p}_{\text{valutazione in } p}$$

$\Rightarrow \ker e_p =$ fascio delle funzioni continue su X a valori in $\mathbb{R}$, nulle in p.

2) X varietà differenziabile

$$d : \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \underbrace{A^1}_{1\text{-forme}}$$

$\ker d = \underline{\mathbb{R}}$ fascio delle funzioni loc. costanti in $\mathbb{R}$

$$d : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p+1} \qquad p \geq 1$$

$\operatorname{Ker} d$ = fascio delle p-forme chiuse su X $=: \mathcal{Z}^p$

$\mathcal{Z}^p(U) = \{ p\text{-forme chiuse su } U \}$.

3) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ = fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*$ = fascio delle funz. olomorfe mai nulle su $\mathbb{C}$ (gruppo moltiplicativo)

$$\exp : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \qquad X \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}$$

$$f(z) \mapsto e^{2\pi i f(z)}$$

$\operatorname{Ker} \exp = \underline{\mathbb{Z}}$ fascio delle funz. localm. costanti a valori in $\mathbb{Z}$

perché: ~~$e^{2\pi i f(z)} \equiv$~~

1) $e^{2\pi i w} = 1 \iff w \in \mathbb{Z}$

2) $e^{2\pi i f(z)} \equiv 1 \iff \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{Z}$

(ma f continua)

$\iff f$ è localm. costante a valori in $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Lo stesso vale per } X = \text{varietà complesse}}$

FASCIO IMMAGINE.

Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci.
Consideriamo

$$\{ \operatorname{Im} \varphi_U \} \subseteq \mathcal{G}(U)$$

Se $V \subseteq U$, si ha: $\rho^U_V (\operatorname{Im} \varphi_U) \subseteq \operatorname{Im} \varphi_V$

$\rightsquigarrow \{ \operatorname{Im} \varphi_U \}$ è un sottoprefascio di $\mathcal{G}$

Ma: in generale questo non è un fascio

ES. X varietà differenziabile

$$d : A^p \to A^{p+1}$$

$$d_U : A^p(U) \to A^{p+1}(U)$$

$$\to \operatorname{Im} d_U = \{ \omega \in A^{p+1}(U) \mid \omega \text{ è esatta} \}.$$

Ma: essere esatta non è una proprietà locale, cioè una forma può essere localmente esatta ~~senza~~ essere esatta.

ES. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \exists \omega$ 1-forma chiusa su X non esatta

$X = U \cup V$

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \geq 0 \}$ $\quad U, V$

$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \leq 0 \}$ $\quad$ sono diffeomorfi a $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per il lemma di Poincaré

$\omega_{|U}$ è esatto

$\omega_{|V}$ è esatto

<u>Def</u> Il FASCIO IMMAGINE $\mathrm{Im}\,\varphi$ di $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è il fascio associato al prefascio

$\{\mathrm{Im}\,\varphi_U\}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\varphi$ è un sottofascio di $\mathcal{G}$

$\forall U$ si ha:

$$\mathrm{Im}\,\varphi_U \subseteq (\mathrm{Im}\,\varphi)(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$$

$$(\mathrm{Im}\,\varphi)(U) = \{g \in \mathcal{G}(U) \mid \forall p \in U \ \exists V \text{ intorno aperto di } p \text{ in } U \ \exists f \in \mathcal{F}(V) \text{ t.c. } g_{|V} = \varphi_V(f)\}.$$

<u>ES.</u> X varietà differenziabile

$$d : A^p \longrightarrow A^{p+1}$$

$$\mathrm{Im}\, d \subseteq A^{p+1}$$

$(\mathrm{Im}\, d)(U) = \{(p+1)\text{-forme su } U \text{ che sono localmente esatte}\}$

$= \{(p+1)\text{-forme chiuse su } U\} = \mathcal{Z}^{p+1}(U)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, d_p = \mathcal{Z}^{p+1} = \ker d_{p+1}$.

Esattezza.

Def Un morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si dice INIETTIVO se $\ker \varphi = 0$.
(è il fascio nullo).

φ si dice SURIETTIVO se $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathcal{G}$.

Def. Dati $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$
diciamo che la successione è ESATTA (ESATTA IN $\mathcal{G}$) se

$$\mathrm{Im}\, \varphi = \ker \psi .$$

Note: 1) $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è iniettivo
$\Longleftrightarrow$ $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$
è esatta.

2) $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è suriettivo $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0$ è esatta.

OSS Data $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$,
riformuliamo l'esattezza in termini di sezioni su ogni aperto U.

(11)

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

(gruppi & omo di gruppi)

deve essere: $(\operatorname{Im}\varphi)(U) = (\operatorname{Ker}\psi)(U) = \operatorname{Ker}\psi_U$
in $\mathcal{G}(U)$

$\mathcal{G}(U)$ contiene: $\operatorname{Ker}\psi_U$; $(\operatorname{Im}\varphi)(U) \supseteq \operatorname{Im}\varphi_U$

$\rightsquigarrow$ per avere l'esattezza bisogna che:

1) $\operatorname{Im}\varphi_U \subseteq \operatorname{Ker}\psi_U$
(equivalente a $\psi_U \circ \varphi_U = 0$
cioè la successione di gruppi è un complesso).

2) $\forall g \in \operatorname{Ker}\psi_U$, $\forall p \in U$
$\exists V$ intorno aperto di p in U
$\exists f \in \mathcal{F}(V)$ t.c. $g_{|V} = \varphi_V(f)$.

Prop Una successione $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ è esatta $\iff$ $\forall p \in X$ la successione di gruppi
$$\mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p$$
è esatta. ($\operatorname{Im}\varphi_p = \operatorname{Ker}\psi_p$

"esatta sulle spighe".

DIM.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$ per esercizio.

Sia $U \subseteq X$ aperto e mostriamo le proprietà ★

1) $\boxed{\operatorname{Im} \varphi_U \subset \ker \psi_U}$ $\qquad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$

Sia $g \in \operatorname{Im} \varphi_U$

$\Rightarrow g = \varphi_U(f) \qquad f \in \mathcal{F}(U)$

$\forall p \in U \qquad [g]_p = \varphi_p([f]_p)$

Dall'esattezza nelle spighe: $[g]_p \in \ker \psi_p$

$$\Rightarrow \psi_p([g]_p) = 0$$

$$\begin{gathered} \parallel \\ [\underbrace{\psi_U(g)}_{\in \mathcal{H}(U)}]_p \end{gathered}$$

$\Rightarrow \psi_U(g)$ ha germe nullo in ogni pto, $\mathcal{H}$ fascio $\Rightarrow \psi_U(g) = 0 \Rightarrow g \in \ker \psi_U$

2) Sia $g \in \ker \psi_U$. Allora $\forall p \in U$

$$\psi_p([g]_p) = [\underbrace{\psi_U(g)}_{\substack{\parallel \\ 0}}]_p = 0$$

Per l'esattezza nelle spighe si ha

$[g]_p \in \operatorname{Im} \varphi_p$

$\Rightarrow \exists\, s \in \mathcal{F}_p$ t.c. $[g]_p = \varphi_p(s)$

$\Rightarrow \exists\, V$ intorno aperto di p, $V \subseteq U$

$\exists\, f \in \mathcal{F}(V)$ t.c. $s = [f]_p$

$\Rightarrow [g]_p = \varphi_p([f]_p) = [\varphi_V(f)]_p$

$\Rightarrow \exists\, W$ intorno aperto di p in V t.c.

$g_{|W} = \varphi_V(f)_{|W} = \varphi_W(f_{|W})$.

<u>Coroll.</u> Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci è

- iniettivo $\Longleftrightarrow$ è iniettivo sulle spighe, cioè $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è iniettivo $\forall p \in X$
- suriettivo $\Longleftrightarrow$ è suriettivo sulle spighe.

(si applica la prop. precedente a $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0$).

<u>ES.</u> X varietà differenziabile

$$A^p \xrightarrow{d_p} A^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} A^{p+2}$$

$\operatorname{Im} d_p = \operatorname{Ker} d_{p+1}$ (forme chiuse)

$\Rightarrow$ la successione è esatta

$\to$ otteniamo una successione esatta di fasci di spazi vett. reali su X:

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^n \to 0$$

complesso di de Rham di X (a livello di fasci). $(n = \dim X)$

<u>OSS</u> (esattezza a livello di fasci / sezioni globali).

1) Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è iniettivo, allora $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ è iniettivo.

(perché φ è iniettivo sse $\ker \varphi = 0$ sse $\ker \varphi_U$ è iniettivo $\forall U$ sse φ_U è iniettivo $\forall U$).

2) Se $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n$

è una successione esatta di fasci, la successione delle sezioni globali

$$\mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{(\varphi_1)_X} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{(\varphi_2)_X} \cdots \mathcal{F}_{n-1}(X) \xrightarrow{(\varphi_{n-1})_X} \mathcal{F}_n(X)$$

è un complesso, cioè $(\varphi_i)_X \circ (\varphi_{i-1})_X = 0 \quad \forall i$

(momento 1 ★)

(ma in generale non è esatto!!!)

ES. X varietà differenziabile (varietà)

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \to \cdots \to \mathcal{A}^n \to 0$$

complesso di de Rham (fasci esatti)

Sezioni globali:

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{A}^1(X) \to \cdots \to \mathcal{A}^n(X) \to 0$$

@ complesso di de Rham
(è un complesso ma in generale non è esatto!)

$\leadsto$ la non esattezza è misurata dai gruppi di coom. di de Rham di X.

3) Data una succ. esatta di fasci:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

allora anche la successione delle sezioni globali

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathcal{H}(X)$$

è esatta.

Notazione: $\mathcal{F}(U) = \Gamma(\mathcal{F}, U)$

$\mathcal{F}(X) = \Gamma(\mathcal{F}, X)$