Recall:

ESISTENZA DI PRIMITIVA, LOGARITMO, RADICE

1) $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto sempl. connesso
$f \in \mathcal{O}(U)$
$\Rightarrow f$ ammette primitiva su U, cioè $\exists$
$g \in \mathcal{O}(U)$ t.c. $f = g'$.

2) $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto sempl. connesso, $0 \notin U$
$\cancel{f \in \mathcal{O}^*(U)}$ $\Rightarrow \exists \log(z)$ su U
~~$\Rightarrow f$ ammette logaritmo su U, cioè $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ t.c. $f(z) = e^{g(z)}$.~~

$\boxed{\text{Dim.}}$ Consideriamo $f(z) = \frac{1}{z} \in \mathcal{O}(U)$

e sia $g \in \mathcal{O}(U)$ una primitiva per f.

Allora
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z} e^{g(z)}\right) = \frac{1}{z} e^{g(z)} \cdot g'(z) - \frac{1}{z^2} e^{g(z)} \equiv 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{z} e^{g(z)}$ è costante su U connesso

$e^{g(z)} = \lambda z$ su U

$\Rightarrow$ traslando g possiamo porre $\lambda = 1$.

3) Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto sempl. connesso,
$f \in \mathcal{O}^*(U) \Rightarrow f$ ammette logaritmo su U,
cioè $\exists g \in \mathcal{O}(U)$ t.c. $f(z) = e^{g(z)}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(U)$, sia $g(z)$ una primitiva.

Allora

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\, e^{g(z)}\right) = \frac{1}{f(z)}\, e^{g(z)} \cdot g'(z) - \frac{f'(z)}{f(z)^2}\, e^{g(z)}$$

$$\equiv 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}\, e^{g(z)}$ è costante

$\Rightarrow e^{g(z)} = \lambda f(z)$ $\Rightarrow$ traslando g, possiamo avere $\lambda = 1$.

4) Sia U sempl. connesso e $f \in \mathcal{O}^*(U)$.

Sia $m \in \mathbb{N}$.

~~Allora~~ f ammette radice m-esime su U, cioè $\exists\, g \in \mathcal{O}(U)$ t.c. $f(z) = g(z)^m$

($\Rightarrow g(z) \neq 0$ su U).

DIM Sia $h(z)$ un logaritmo per f su U

e sia $g(z) := e^{\frac{1}{m} h(z)} \in \mathcal{O}(U)$

$\Rightarrow g(z)^m = f(z)$.