GEOMETRIA SUPERIORE 25/3/2022 (1)

L3

<u>OSS</u> Se $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$

è esatta, allora anche la succ. delle sezioni globali è esatta:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathcal{H}(X).$$

DIM. Sappiamo già che φ_X è iniettiva e che $\operatorname{Im}\varphi_X \subset \ker\psi_X$.

Sia $g \in \ker\psi_X$.

esattezza nei fasci $\Rightarrow$ $\exists \{U_i\}$ ricoprimento aperto di X

$\exists f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ t.c. $\varphi_{U_i}(f_i) = g_{|U_i}$

Sia $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Allora

$$\varphi_{U_{ij}}(\underbrace{f_{i|U_{ij}} - f_{j|U_{ij}}}_{\in \mathcal{F}(U_{ij})}) = g_{|U_{ij}} - g_{|U_{ij}} = 0$$

φ iniettivo $\Rightarrow$ $\varphi_{U_{ij}}$ iniettivo

$\Rightarrow f_{i|U_{ij}} - f_{j|U_{ij}} = 0$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}(X)$ t.c. $f_{|U_i} = f_i$. Allora

$$\varphi_X(f)_{|U_i} = \varphi_{U_i}(f_{|U_i}) = \varphi_{U_i}(f_i) = g_{|U_i} \quad \forall i$$

$\Rightarrow \varphi_X(f) = g \Rightarrow f \in \mathrm{Im}\,\varphi_X$. $\square$

<u>OSS</u> (successione esponenziale)

$X = \mathbb{C}$

$$\exp : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*$$

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \quad \text{succ. esatta di fasci.}$$

Notiamo che exp è un morfismo di fasci suriettivo.

Ovvero: se $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $g(z) \in \mathcal{O}(U)$ olomorfa e mai nulla

allora $\exists \{U_i\}$ ricoprimento aperto di U e $\exists f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ $\forall i$ t.c.

$$g(z)_{|U_i} = e^{f_i(z)} \quad \text{su } U_i.$$

(basta prendere U_i sempl. connesso)

$\Rightarrow$ abbiamo una succ. esatta di fasci:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0.$$

(lo stesso vale per: X aperto di $\mathbb{C}$
X aperto di $\mathbb{C}^n$
X varietà complesse)

SUCCESSIONE ESATTA CORTA

è esatta.)

Varietà complesse / superfici di Riemann.

X spazio top. Hausdorff, a base numerabile, connesso

- Un atlante complesso per X è una collezione di carte locali

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$$

U_α aperto di X

V_α aperto di $\mathbb{C}^n$

φ_α omeom.

$\{U_\alpha\}$ ricopr. aperto di X

+ camb. di coordinate sono olomorfi.

- Una struttura complessa per X è un atlante complesso massimale (o una classe di equivalenza di atlanti complessi).

- X è una varietà complessa se ha una struttura complessa fissata

$n = \dim X$

$\rightsquigarrow$ X è una varietà topologica di dim. $2n$

(10)

$\rightsquigarrow$ X è una varietà diff. reale C^∞ di dim. $2n$

$\rightsquigarrow$ X è <u>orientabile</u>

infatti se U, V sono aperti di $\mathbb{C}^n$ e $f: U \to V$ è un biolomorfismo e $F: \underset{\mathbb{R}^{2n}}{\underset{\cap}{U}} \to \underset{\mathbb{R}^{2n}}{\underset{\cap}{V}}$ è f vista come appl. reale $\rightsquigarrow$ F è diffeom. C^∞

allora

$$\det \underbrace{\mathrm{Jac}\, F}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{reale} \\ 2n \times 2n}} = |\det \underbrace{\mathrm{Jac}\, f}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{complessa } n \times n}}|^2$$

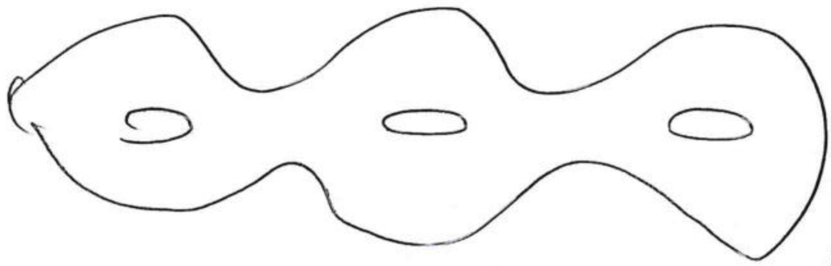
(conseguenza di Cauchy-Riemann)

$\Rightarrow$ l'atlante C^∞ ~~che~~ dato dalla struttura complessa è sempre orientato.

Una <u>superficie di Riemann</u> è una var. complessa di dim. 1.

<u>OSS</u> Se X è una superficie di Riemann compatta, allora ~~\&~~ dal punto di vista topologico X è una superficie

topologica compatta e orientabile (11)
$\Rightarrow X$ è omeomorfa a un toro con
g buchi
$g \geq 0$



g = GENERE TOPOLOGICO di X.

(in effetti: X è anche diffeomorfa a
T_g, ovvero: se due superfici di
Riemann cpte hanno lo stesso
genere, allora sono sempre diffeomorfe,

Es. $\mathbb{C}$ e il disco $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
non sono biolomorfi (pur essendo omeomorfi)

Infatti perché se $f: \mathbb{C} \to \Delta$ è olomorfa,
per Liouville deve essere costante.

ESERCIZIO
Es. Sia $H := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ semipiano superiore.

Mostrare che
$$f: H \longrightarrow \Delta$$
$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$
è ben definita ed è un biolomorfismo

OSS S^2 ha una struttura di complessa: sfera di Riemann $\cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Teorema: S^4 e S^{2n} per $n \geq 4$ non ammettono struttura complessa.

- Per S^6 non si sa!

ES. Esempi di varietà complesse:

$\mathbb{C}^n$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (carte locali sono le carte affini standard)
$\hookrightarrow$ cpta

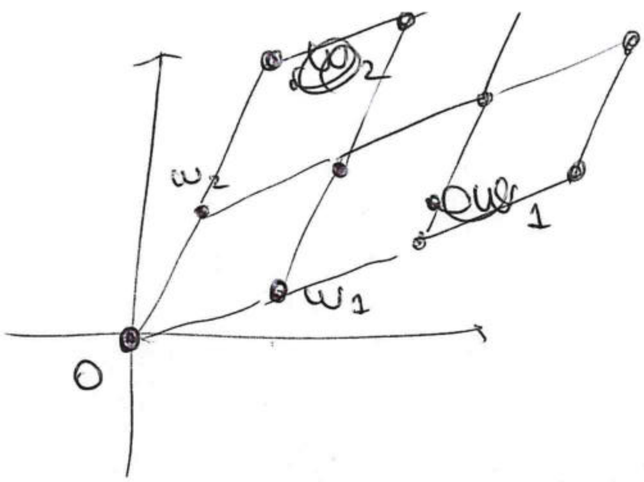
- ogni aperto connesso di una varietà complessa

ES. TORI COMPLESSI.

In $\mathbb{C}^n$ consideriamo

$w_1, \ldots, w_{2n}$ vettori lin. indip. su $\mathbb{R}$ (e quindi una base reale).

ES: Se $n=1$: $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ non nulli, non multipli



Sia $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ il sottogruppo additivo generato da $\omega_1 .., \omega_{2n}$

$$\Gamma = \{ m_1 \omega_1 + \dots + m_{2n} \omega_{2n} \mid m_i \in \mathbb{Z} \}$$

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2n}$$

$\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ è un sottoinsieme discreto

Γ si dice RETICOLO in $\mathbb{C}^n$.

Sia $X := \dfrac{\mathbb{C}^n}{\Gamma}$ il gruppo quoziente

e $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ la proiezione

Diamo a X la topologia quoziente.

Nota: X è omeomorfo a $\dfrac{\mathbb{R}^{2n}}{\mathbb{Z}^{2n}} \cong (S^1)^{2n}$

Infatti, possiamo definire

$$\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$\mathbb{R}$-lineare, invertibile, che manda $\omega_1 .., \omega_{2n}$ in $\underline{e}_1 .., \underline{e}_{2n}$

(ϕ è anche omeomorfismo).

e $\phi(\Gamma) = \mathbb{Z}^{2n}$

$\Rightarrow \phi$ induce un iso di gruppi e anelli.

$$X \cong \frac{\mathbb{R}^{2n}}{\mathbb{Z}^{2n}} = (S^1)^{2n}$$

Se $n=1$: $X \approx$ toro 

Nota: π è il quoziente per l'azione di Γ su $\mathbb{C}^n$ per traslazione (azione per omeomorfismi) $\Rightarrow \pi : \mathbb{C}^n \to X$ è aperta.

Se $V \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto allora

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \underbrace{\bigcup_{w \in \Lambda} \underbrace{(V + w)}_{\text{aperto}}}_{\text{aperto}}$$

Costruiamo un atlante complesso su X

Esercizio Mostrare che $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ è discreto.

$0 \in \Gamma \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\|w\| > 2\varepsilon$ $\forall w \in \Gamma \setminus \{0\}$

Allora se $z_0 \in \mathbb{C}^n$ la proiezione π è iniettiva su

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - z_0\| < \varepsilon\}$$

Infatti se $z_1, z_2 \in D(z_0, \varepsilon)$

$\Rightarrow \| z_1 - z_2 \| \leq \| z_1 - z_0 \| + \| z_2 - z_0 \|$

$< 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ Se $z_1 - z_2 \in \Gamma$, allora $z_1 = z_2$.

$$\Rightarrow \pi_{|D(z_0,\varepsilon)} : D(z_0,\varepsilon) \longrightarrow U_{z_0} \overset{!!}{=} \pi(D(z_0,\varepsilon))$$

. U_{z_0} è intorno aperto di $\pi(z_0) \in X$

$\pi_{|D(z_0,\varepsilon)}$ è omeom.

$\Rightarrow \varphi_{z_0} := \left(\pi_{|D(z_0,\varepsilon)}\right)^{-1} : U_{z_0} \to D(z_0,\varepsilon)$

è omeomorfismo

$\rightsquigarrow$ <u>carta locale per X</u>.