GRADO DI UNA MAPPA PROPRIA

[A-T] ESERCIZI 5.27 E 5.28

[BOTT-TU] DIFFERENTIAL FORMS IN ALGEBRAIC TOPOLOGY

VOGLIAMO DEFINIRE IL GRADO DI UNA MAPPA PROPRIA TRA DUE VARIETÀ DELLA STESSA DIMENSIONE (CONNESSE ORIENTABILI). SIANO ~~dim~~ M, N di ~~dim~~ DIMENSIONE n

SAPPIAMO CHE $H^n_c(M) = \langle \omega_M \rangle$

$$H^n_c(N) = \langle \omega_N \rangle$$

(CONSEGUENZA DELLA DUALITÀ DI POINCARÉ)

SIANO M, N CONNESSE E $f: M \to N$ C^∞ E PROPRIA. È BEN DEFINITO IL PULL-BACK $f^*: H^n_c(N) \to H^n_c(M)$

IL GRADO $\deg f \in \mathbb{R}$ DI f È DEFINITO DALL'UGUAGLIANZA

$$\int_M f^* \omega_N = \deg f \cdot \int_N \omega_N$$

È BEN DEFINITO: INFATTI $\forall\, \omega \in \Omega^n_c(N)$ $[\omega] = \lambda [\omega_N] \in H^n_c(N)$

$$\int_M f^* \omega = \int_M f^*(\lambda \omega_N) = \lambda \int_M f^* \omega_N = \deg f \int_N \omega$$

OSS. 1. ~~deg~~ $\deg f$ DIPENDE SOLO DA f E DALLE ORIENTAZIONI SCELTE.

2. SI PUÒ DEFINIRE $\deg f$ ANCHE

SUPPONENDO SOLO N CONNESSA.

SE M NON È CONNESSA, SI HA

$H^n_c(M) = \bigoplus_\alpha \mathbb{R}$ DOVE M_α

SONO LE COMPONENTI CONNESSE DI M.

VOGLIAMO ORA DIMOSTRARE:

PROP $\deg f \in \mathbb{Z}$

LO DIMOSTRIAMO PRIMA PER $M = N = \mathbb{R}^n$

RICORDIAMO LE SEGUENTI

DEF. • $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^∞, $p \in \mathbb{R}^n$

SI DICE PUNTO CRITICO PER f SE

$df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}(\mathbb{R}^n)$ NON È

SURIETTIVO.

• SE $p \in \mathbb{R}^n$ È UN PUNTO CRITICO,

$q = f(p)$ SI DICE VALORE CRITICO.

• ~~SE~~ $q \in \mathbb{R}^n$ È UN VALORE REGOLARE

SE q NON È UN VALORE CRITICO.

OSS. TUTTI I PUNTI $q \in \mathbb{R}^n$ TALI CHE

$q \notin \operatorname{Im} f$ SONO VALORI REGOLARI.

INIZIAMO A PROVARE IL SEGUENTE

RISULTATO

PROP. SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UNA MAPPA PROPRIA. SE f NON È SURIETTIVA ALLORA $\deg f = 0$.

DIM L'IMMAGINE DI UNA MAPPA PROPRIA È CHIUSA (È VERO PER OGNI SPAZIO TOPOLOGICO DI HAUSDORFF ~~E~~ LOCALMENTE COMPATTO). QUINDI SE $q \notin \operatorname{Im} f$ ESISTE UN INTORNO U DI q TALE CHE $U \cap \operatorname{Im} f = \emptyset$. SIA ORA α UNA n-FORMA A SUPPORTO COMPATTO CONTENUTO IN $U \Rightarrow f^*\alpha = 0$

$$\Rightarrow \deg f = 0 \in \mathbb{Z}.$$

DIMOSTRIAMO ALLORA IL RISULTATO PER C^∞

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ PROPRIA E SURIETTIVA.

SIA $q \in \mathbb{R}^n$ UN VALORE REGOLARE(*) PER f, $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ PER IPOTESI. df_p PER $p \in f^{-1}(q)$ È SURIETTIVO, QUINDI È UN ISOMORFISMO. PER IL TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, INTORNO A OGNI PUNTO $p \in f^{-1}(q)$,

---

(*) LO SONO QUASI TUTTI PER IL TEOREMA DI SARD: L'INSIEME DEI VALORI CRITICI PER f È UN INSIEME DI MISURA NULLA IN $\mathbb{R}^n$.

f È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE.

QUINDI L'INSIEME $f^{-1}(q)$ È COSTITUITO DA PUNTI ISOLATI, MA f È PROPRIA E q È UN COMPATTO $\Rightarrow$ $f^{-1}(q)$ È UN INSIEME FINITO: $\{p_1, \dots, p_r\}$.

SIA ORA $[\alpha] \in H^n_c(\mathbb{R}^n)$ UN GENERATORE CON SUPPORTO COMPATTO LOCALIZZATO IN UN INTORNO DI q.

SI HA CHE $f^*(\alpha)$ È UNA n-FORMA IL CUI SUPPORTO COMPATTO È LOCALIZZATO IN INTORNI DEI PUNTI $\{p_1, \dots, p_r\}$:

$U_{p_1}, \dots, U_{p_r}$

RICORDIAMO CHE UN DIFFEOMORFISMO 5.
PRESERVA L'INTEGRALE A MENO DEL SEGNO
(A SECONDA CHE PRESERVI O MENO L'ORIENTAZIONE). QUINDI

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \int_{U_{p_i}} f^*\alpha\Big|_{U_{p_i}} = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\substack{f(U_{p_i}) \\ \| \\ U \ni q}} \alpha$$

$$= \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm 1 \qquad \text{E } \operatorname{supp} \alpha \subseteq U$$

↳ SCELGO α T.C. $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 1$

QUINDI $\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \deg(f) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \alpha}_{=1} = \sum_{f^{-1}(q)} \pm 1$

$\Rightarrow \deg(f) \in \mathbb{Z}$. $\square$

OSS IN PARTICOLARE, DA QUESTO SEGUE CHE IL NUMERO DEI PUNTI CONTATI CON MOLTEPLICITÀ ± 1 NELLA CONTROIMMAGINE DI OGNI VALORE REGOLARE È LO STESSO PER OGNI VALORE REGOLARE ED È UGUALE A $\deg(f)$.

NEL CASO $f: M \to N$ LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA:

- ~~TEOREMA DI SARD~~ L'INSIEME DEI VALORI CRITICI DI UNA MAPPA C^∞ $f: M \to N$ HA MISURA NULLA.

- DEF $S \subseteq M$ SOTTOINSIEME HA MISURA NULLA SE ESISTE UN RICOPRIMENTO NUMERABILE DI APERTI COORDINATI U_i T.C. $\varphi_i(S \cap U_i)$ HA MISURA NULLA IN $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$)

- SE $f: M \to N$ NON È SURIETTIVA, $\deg f =$

(

- UNA MAPPA PROPRIA (CONTINUA) TRA VARIETÀ TOPOLOGICHE È CHIUSA (VEDI AD ESEMPIO (*))
- L'APERTO $U \ni q$ E GLI APERTI $U_i \ni p_i$ POSSONO ESSERE SCELTI COME DOMINI DI CARTE ORIENTATE (U, φ), (U_i, φ_i) CON $U_i \cap U_j = \phi$ E CON

(i) $f: U_i \to U$ DIFFEO. LOCALE

(ii) $f^{-1}(U) = \bigcup U_i$.

$\square$

(*) LEE "INTRODUCTION TO SMOOTH MANIFOLDS" THEOREM A.52 (SECOND EDITION)

RICORDIAMO CHE UN DIFFEOMORFISMO PRESERVA L'INTEGRALE A MENO DEL SEGNO (A SECONDA CHE PRESERVI O MENO L'ORIENTAZIONE). QUINDI

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \int_{U_{p_i}} f^*\alpha\Big|_{U_{p_i}} = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\substack{f(U_{p_i}) \\ \shortparallel \\ U \ni q}} \alpha$$

$$= \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm \int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \pm 1$$

E $\mathrm{supp}\,\alpha \subseteq U$

↳ SCELGO α T.C. $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 1$

QUINDI $\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \deg(f) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \alpha}_{=1} = \sum_{f^{-1}(q)} \pm 1$

$\Rightarrow \deg(f) \in \mathbb{Z}$. □

<u>OSS</u> IN PARTICOLARE, DA QUESTO SEGUE CHE IL NUMERO DEI PUNTI CONTATI CON MOLTEPLICITÀ ± 1 NELLA CONTROIMMAGINE DI OGNI VALORE REGOLARE <u>È LO STESSO</u> PER OGNI VALORE REGOLARE ED È UGUALE A $\deg(f)$.

m dim M = dim N

- SE M, N SONO VARIETÀ COMPLESSE CONNESSE E f È OLOMORFA (PROPRIA)

$$\deg f = \# f^{-1}(q) \quad q \text{ VALORE REGOLARE}$$

INFATTI LE VARIETÀ COMPLESSE SONO ORIENTABILI E LE MAPPE OLOMORFE PRESERVANO L'ORIENTAZIONE

•