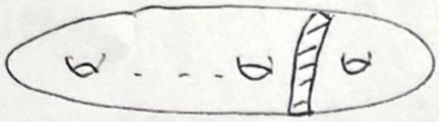
• COOMOLOGIA DI DE RHAM DELLE SUPERFICI COMPATTE S_g (ORIENTABILI)

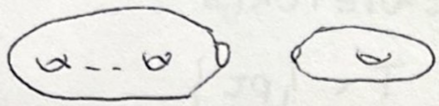
UTILIZZIAMO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI

$U \simeq \tilde{S}_{g-1} = S_{g-1} \setminus \{pt\}$

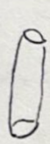
$V \simeq \tilde{T} = T \setminus \{pt\}$

$U \cap V \simeq S^1$





$U \simeq S_{g-1} \setminus \{pt\}$ $\quad V \simeq T \setminus \{pt\}$

$U \cap V$  $\simeq S^1$

$\simeq$ OMOTOPIA

$$
\begin{aligned}
0 \to\ & \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S_g)} \to \underset{\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^0(\tilde{T})} \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S^1)} \xrightarrow{\delta^0} \\
\to\ & H^1(S_g) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^1(\tilde{T}) \xrightarrow{\beta^1} \underset{\cong \mathbb{R}}{H^1(S^1)} \xrightarrow{\delta^1} \\
\to\ & H^2(S_g) \to H^2(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^2(\tilde{T}) \to 0
\end{aligned}
$$

• PER PROCEDERE CALCOLIAMO LA COOMOLOGIA DI DE RHAM DEL TORO BUCATO $\tilde{T}$ E DELLA SUPERFICIE BUCATA $\tilde{S}_{g-1}$

INOLTRE PROCEDEREMO PER INDUZIONE SU g

• COOMOLOGIA DI $\tilde{T} = T \setminus \{pt\}$

CONOSCO LA COOMOLOGIA DI T:

$$H^k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} & k=1 \\ \mathbb{R} & k=2 \end{cases}$$

UTILIZZO LA SUCC. DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI $U = T \setminus \{pt\}$

V APERTO DI T CONTENENTE pt E DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^2$

$$U \cap V \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{pt\} \sim S^1$$

OSS. IN QUESTO CASO CONOSCO $H^k(T)$ E VOGLIO CALCOLARE $H^k(U) = H^k(\tilde{T})$

$$0 \to \underset{\cong\mathbb{R}}{H^0(T)} \to \underset{\cong\mathbb{R}}{H^0(\tilde{T})} \oplus \underset{\cong\mathbb{R}}{H^0(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\beta^0} \underset{\cong\mathbb{R}}{H^0(U\cap V)} \to$$

$$\to \underset{\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{H^1(T)} \xrightarrow{\alpha^1} H^1(\tilde{T}) \oplus \underset{0}{\underset{\parallel}{H^1(\mathbb{R}^2)}} \xrightarrow{\beta^1} \underset{\cong\mathbb{R}}{H^1(U\cap V)} \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\to \underset{\cong\mathbb{R}}{H^2(T)} \to H^2(\tilde{T}) \oplus \underset{0}{\underset{\parallel}{H^2(\mathbb{R}^2)}} \to 0$$

SOMMA ALTERNA DELLE DIMENSIONI:

$$1 - 2 + 1 - 2 + \dim H^1(\tilde{T}) - 1 + 1 - \dim H^2(\tilde{T}) = 0$$

$$\Rightarrow \dim H^1(\tilde{T}) = \dim H^2(\tilde{T}) + 2$$

DALLA DUALITÀ DI POINCARÉ SEGUE CHE $\dim H^2(\tilde{T}^*) = 0$ ($\tilde{T}^*$ È ORIENTABILE NON COMPATTA) $\Rightarrow \dim H^1(\tilde{T}^*) = 2$.

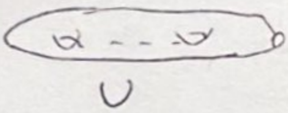
QUINDI $H^k(\tilde{T}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & k=1 \\ 0 & k=2 \end{cases}$

- COOMOLOGIA DI $\tilde{S}_{g-1} = S_{g-1} \setminus \{pt\}$

UTILIZZIAMO LA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS RELATIVA AGLI APERTI

$U = \tilde{S}_{g-1}$

V = APERTO DI S_{g-1} CONTENENTE PT E DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^2$



$U \cap V \simeq S^1$

<u>OSS</u> PROCEDIAMO ANALOGAMENTE A QUANTO FATTO PER $\tilde{T}$: UTILIZZIAMO LA COOMOLOGIA DI S_{g-1} PER CALCOLARE LA COOMOLOGIA DI $\tilde{S}_{g-1}$.

A QUESTO PUNTO ENTRA IN GIOCO L'INDUZIONE SU g (SULLA COOMOLOGIA DI S_{g-1})

SUPPONIAMO NOTA LA COOMOLOGIA

DI S_{g-1} : $H^k(S_{g-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1} & k=1 \\ \mathbb{R} & k=2 \end{cases}$

PER $g=1$ ABBIAMO $H^k(T)$, NOTA.

SCRIVIAMO LA SUCCESSIONE ESATTA LUNGA DI MAYER-VIETORIS:

$$0 \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(S_{g-1})} \to \underset{\mathbb{R} \quad\oplus\quad \mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1}) \oplus H^0(\mathbb{R}^2)} \to \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^1)} \to$$

$$\to \underset{\mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1}}{H^1(S_{g-1})} \to H^1(\tilde{S}_{g-1}) \oplus \underset{0}{\underset{\|}{H^1(\mathbb{R}^2)}} \to \underset{\mathbb{R}}{H^1(S^1)} \to$$

$$\to \underset{\mathbb{R}}{H^2(S_{g-1})} \to \underset{0}{\underset{\|}{H^2(\tilde{S}_{g-1})}} \oplus \underset{0}{\underset{\|}{H^2(\mathbb{R}^2)}} \to \underset{0}{\underset{\|}{H^2(S^1)}} \to$$

↳ DUALITÀ DI POINCARÉ: È ORIENTABILE NON COMPATTA.

⇒ DALLA FORMULA SULLA SOMMA ALTERNA DELLE DIMENSIONI

OTTENIAMO $H^1(\tilde{S}_{g-1}) \cong \mathbb{R}^{g-1} \times \mathbb{R}^{g-1}$

A QUESTO PUNTO TORNIAMO ALLA SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS INIZIALE SU S_g:

$$0 \to \underset{\mathbb{R}}{H^0(S_g)} \to \underset{\mathbb{R}}{H^0(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{\mathbb{R}}{H^0(\tilde{T})} \xrightarrow{\beta^1} \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^1)} \to$$

$$\to \underset{\Rightarrow \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g}{H^1(S_g)} \to \underset{\mathbb{R}^{2g-2}}{H^1(\tilde{S}_{g-1})} \oplus \underset{\times\ \mathbb{R}^2}{H^1(\tilde{T})} \to \underset{\mathbb{R}}{H^1(S^1)} \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\to \underset{\mathbb{R}}{H^2(S_g)} \to \underset{0}{\underset{\parallel}{H^2(\tilde{S}_{g-1})}} \oplus \underset{0}{\underset{\parallel}{H^2(\tilde{T})}} \to 0$$

~~ERANDE LA~~ CALCOLANDO LA SOMMA ALTERNA DELLE DIMENSIONI OTTENIAMO

$$H^1(S_g) \simeq \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$$

<u>N.B.</u> HO SUPPOSTO NOTO CHE

$$H^2(S_g) = \mathbb{R}$$ (VERO PER LA DUALITÀ DI POINCARÉ)

~~VEDERE FILE IN PIATTAFORMA~~ (~~DA~~ "INTRODUCTION TO ~~DIFFERENTIAL~~ MANIFOLDS" PER UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA. (PAG. ~~23~~ 268

FINE DEL CALCOLO DI $H^k(S_2)$).