$$X = \frac{\mathbb{C}^n}{\Gamma}$$

Γ reticolo
"
sottogruppo additivo
gen. da $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$
lin. indip. su $\mathbb{R}$

$\pi : \mathbb{C}^n \to X$

Sia $\varepsilon > 0$ t.c. $|\omega| > 2\varepsilon$ $\forall \omega \in \Gamma \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \pi$ è iniettiva su $D(z_0, \varepsilon)$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$

$U_{z_0} := \pi(D(z_0, \varepsilon))$

$\varphi_{z_0} := (\pi_{|D(z_0,\varepsilon)})^{-1} : U_{z_0} \to D(z_0, \varepsilon)$

$\hookrightarrow$ carte locali

Dato $z_1 \in \mathbb{C}^n$ t.c. $U_{z_0} \cap U_{z_1} \neq \emptyset$

$$\begin{tikzcd}
 & U_{z_0} \cap U_{z_1} \arrow[dl, "\varphi_{z_0}"', "\wr"] \arrow[dr, "\wr", "\varphi_{z_1}"'] & \\
A_0 \arrow[rr, "\sim", "\psi"'] & & A_1 \\
D(z_0,\varepsilon) \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[rr] & & D(z_1,\varepsilon) \arrow[u, phantom, "\cap"]
\end{tikzcd}$$

ψ camb. di coord.

Se $z \in A_0$: $\pi(\psi(z)) = \pi(z)$

$\Rightarrow \exists\, \omega_z$ t.c. $\psi(z) = z + \omega_z$

$\psi - Id : A_0 \to \underbrace{\Gamma}$ continua

$\Rightarrow \psi - Id$ è costante nelle comp. connesse di A_0 $\Rightarrow$ la ψ è una traslazione

discreto

in ogni comp. connessa di A_0 ②

$\Rightarrow \varphi$ è olomorfa

$\Rightarrow \varphi$ è biolom.

$\Rightarrow \{\varphi_{z_0}\}$ formano un atlante complesso per X.

Esercizio: Per $n=1$, scrivere un esempio di U_{z_0}, U_{z_1} in cui A_0 non è connesso e la φ-Id non è costante

Nota: Per $n=1$ X è una superficie di Riemann <u>aperta</u> con <u>genere</u> <u>top. 1</u>

Richiamo:

$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto

f olomorfa in U, $f: U \to \mathbb{C}$

$z_0 \in U$ $\qquad w_0 := f(z_0)$

Sia $m := \min\{k \geq 1 \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$

"ordine di f in z_0"

Allora $\exists$: $U_0 \subset U$ intorno aperto di z_0

$\exists\, h: U_0 \to \{|z| < r\} \subset \mathbb{C}$ biolomorfismo

t.c. $f(z) - w_0 = h(z)^m$

$$f(z) - w_0 = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= (z-z_0)^m \cdot \underbrace{\sum_{n \geq m} a_n (z-z_0)^{n-m}}_{g(z)}$$

- g è olomorfa e $\neq 0$ in z_0

$g(z_0) = a_m \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, k(z)$ olomorfa e $\neq 0$ in z_0

t.c. $g(z) = k(z)^m$ nell'intorno di z_0

$$\Rightarrow f(z) - w_0 = \Big(\underbrace{(z-z_0)\cdot k(z)}_{h(z)}\Big)^m$$

- $h(z_0) = 0$

$h'(z) = (z-z_0)\, k'(z) + k(z)$

$h'(z_0) = k(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow h$ biolom. locale.

X sup. di Riemann

$f: U \to \mathbb{C}$ $\quad U \subseteq X$ aperto

f è olomorfa in $p \in U$ se $\exists$

$\varphi: U_0 \to V \subseteq \mathbb{C}$ carta locale

con $p \in U_0 \subseteq U$

t.c. $f \circ \varphi^{-1}$ è olomorfa in $\varphi(p) \in V$

- non dipende dalla scelta della carta locale.

Proprietà delle funzioni olomorfe su X sup. di Riemann (4)

0) Se f è olomorfe, allora f è continue è C^∞.

1) $\mathcal{O}_X$ è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre

2) Teorema del massimo modulo:

Se $U \subseteq X$ è un aperto connesso e $|f|$ ha massimo in U, allora f è costante.

Dim Sia $z_0 \in U$ in cui $|f|$ ha massimo

~~$\lambda \in \mathbb{R}$~~ Ha $\lambda_0 := f(z_0) \in \mathbb{C}$

e consideriamo $f^{-1}(\lambda_0)$.

- $f^{-1}(\lambda_0)$ chiuso, non $\emptyset$

Sia $U_0 \subseteq U$ un intorno aperto connesso di z_0 su cui sia definita una carta locale $\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 \subseteq \mathbb{C}$

~~Allora~~ $f \circ \varphi^{-1}$ è olomorfa in V connesso e $|f \circ \varphi^{-1}|$ ha massimo in $\varphi(z_0)$

$\Rightarrow f \circ \varphi^{-1}$ è costante $\Rightarrow f_{|U_0}$ costante in λ

$\Rightarrow U_0 \subseteq f^{-1}(\lambda_0) \Rightarrow z_0$ è interno a $f^{-1}(\lambda_0)$

$\Rightarrow f^{-1}(\lambda_0)$ aperto $\longrightarrow$ per connessione $f^{-1}(\lambda_0) = U$.

Coroll Sia X una superficie di Riemann cpta. ~~Allora~~ $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$

(le funzioni olomorfe su X sono costanti)

3) Principio di identità:

Sia $U \subseteq X$ aperto connesso.

a) Sia $f \in \mathcal{O}(U)$ non costante. Allora $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f^{-1}(\lambda) \subset U$ è un sottoinsieme discreto.

b) Siano $f, g \in \mathcal{O}(U)$, $f \neq g$. Allora $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ è discreto in U.

Dim. Mostriamo (a) con $\lambda = 0$.

Sia $A := \{z \in U \mid f \text{ è nulla in un intorno di } z\}$.

- A è aperto in U

Sia $z_0 \in U \setminus A$. Allora:

- $f(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ per continuità $\exists U_1$ intorno aperto di z_0 t.c. $f|_{U_1}$ è sempre $\neq 0$ $\Rightarrow U_1 \subseteq U \setminus A$
- $f(z_0) = 0$, ma f non è nulla in un intorno di z_0
  $\Rightarrow$ componendo con una carta locale vediamo che z_0 è uno zero isolato per f $\Rightarrow \exists U_1$ intorno aperto di z_0 t.c. $f|_{U_1 \setminus \{z_0\}}$ è sempre $\neq 0$ (★)
  $\Rightarrow U_1 \subseteq U \setminus A$

$\Rightarrow U \setminus A$ aperto

$A = U$, $f \equiv 0$

connessione $\Rightarrow$ $A = \phi$, f ha zeri isolati come in (*)

Funzioni meromorfe.

X superficie di Riemann

$p_0 \in X$ $\quad U$ intorno aperto di p_0

$f : U \setminus \{p_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa

- Diciamo che f ha una singolarità isolata in p_0. Abbiamo 3 possibilità:

i) $\exists \lim_{p \to p_0} |f(p)|$ finito $\quad$ SING. ELIMINABILE

ii) $\exists \lim_{p \to p_0} |f(p)| = +\infty$ $\quad$ Polo

iii) $\nexists \lim_{p \to p_0} |f(p)|$ $\quad$ SING. ESSENZIALE

Esercizio Sia $\varphi : U_0 \to V$ carta locale con $p_0 \in U_0$

$\Rightarrow f \circ \varphi^{-1}$ ha sing. isolata in $q_0 = \varphi(p_0) \in V$

Mostrare che la sing. è elim./polo/ess. per f $\Leftrightarrow$ lo è per $f \circ \varphi^{-1}$.

Def Sia $A \subseteq X$ aperto. ~~e S ⊆ A discreto.~~

Una funzione MEROMORFA su A è una

funzione olomorfa

$$f : A \setminus S \to \mathbb{C}$$

dove $S \subset A$ è un sottoinsieme discreto, avente sing. eliminabili o poli nei punti di S.

<u>Proprietà delle funzioni meromorfe</u>.

1) Sia $U \subseteq X$ aperto connesso e f meromorfa su U, non $\equiv 0$.
$\Rightarrow$ l'insieme degli zeri e dei poli di f è discreto in U.

(Se S è l'insieme dei poli di f, allora S è discreto in U e l'insieme Z degli zeri di f è discreto in $U \setminus S$
Nell'intorno di un polo f è $\neq 0$
$\Rightarrow$ gli zeri di f non possono accumularsi in un polo
$\Rightarrow$ Z è discreto anche in U).

<u>Es.</u> $\sin \frac{1}{z}$ ha una sing. ess. in $z=0$ e ha ∞ zeri in ogni intorno dell'origine.

2) Sia $U \subseteq X$ aperto connesso e f, g funzioni meromorfe su U. Se f e g coincidono su un sottoinsieme non

discreto, allora $f = g$.

3) $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}_X(U) =$ insieme delle funzioni meromorfe su U.

- è una $\mathbb{C}$-algebra
- $\mathcal{M}_X$ è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre, che contiene $\mathcal{O}_X$ come sottofascio.

Se U è connesso, allora

$$\mathcal{M}(U) \text{ è un campo.}$$

Infatti se f è meromorfa su U e non id. nulla, allora:

- i suoi poli S
- i suoi zeri Z

$\Big\}$ sono discreti in U

$f|_{U \setminus S \setminus Z}$ è olomorfa e mai nulla

$\Rightarrow \frac{1}{f} : U \setminus (S \cup Z) \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa

$\Rightarrow \frac{1}{f}$ è meromorfa su U.

($\frac{1}{f}$ ha zeri in S e poli in Z).

<u>Coroll.</u> Sia X una superficie di Riemann <u>cpta</u>. Allora ogni funzione meromorfa non id. nulla su X ha un numero finito di zeri e poli.

<u>ES.</u> $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} =$ sfera di Riemann $\Rightarrow \mathcal{M}(X) =$ funzioni razionali su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $m(X) \cong \mathbb{C}(z)$.

Ordine di una funzione meromorfa in un punto:

$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto

$z_0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ f: meromorfa su U

$\Rightarrow$ nell'intorno di z_0

$$f = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_m \neq 0$

- f ha un polo in z_0 sse $m < 0$
- m è l'ordine di f in z_0

Esercizio ~~verificare che l'ordine~~

1) verificare che l'ordine è invariante per biolomorfismo locale

2) Verificare che f ha ordine m in z_0 $\Longleftrightarrow$ localmente in z_0
$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$
g olomorfa e non nulla in z_0

3) Date f, g meromorfe in $z_0 \in \mathbb{C}$ allora $\mathrm{ord}_{z_0}(f \cdot g) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g)$

(ii) e

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f+g) \begin{cases} = \min(\mathrm{ord}_{z_0} f, \mathrm{ord}_{z_0} g) & \mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq \mathrm{ord}_{z_0}(g) \\ \geq \mathrm{ord}_{z_0} f & \mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{ord}_{z_0} g \end{cases}$$

⇝ definiamo l'ordine in un punto anche per una funz. meromorfa su una sup. di Riemann, componendo con una carta locale; l'ordine sarà ben definito e soddisfa (3).

<u>Mappe tra superfici di Riemann.</u>

Siano X, Y sup. di Riemann e $F: X \to Y$ applicazione.

<u>Def</u> F è olomorfa in $p \in X$ se esistono:

- una carta locale $\varphi_1: U_1 \to V_1$ di X con $p \in U_1$
- una carta locale $\varphi_2: U_2 \to V_2$ di Y con $F(p) \in U_2$

t.c. $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ sia definita e olomorfa in $\varphi_1(p)$.

- F è olomorfa se lo è in ogni pto del suo dominio.

<u>Proprietà elementari:</u>

1) $Id_X : X \to X$ e le funzioni costanti sono olomorfe

2) la def. non dipende dalla scelta di φ_1, φ_2

3) Se $Y = \mathbb{C}$, riotteniamo la nozione di funzione olomorfa.

4) Se $F : X \to Y$ è olomorfa, allora F è anche continua, C^∞, e preserva l'orientazione.

5) la composizione di mappe olomorfe è olomorfa.

<u>Def</u> Un isomorfismo (biolomorfismo) tra superfici di Riemann è $F : X \to Y$ olomorfa, biunivoca, t.c. $F^{-1} : Y \to X$ è olomorfa.

- in tal caso X e Y sono anche diffeomorfe e omeomorfe.
- se compatte, hanno lo stesso genere topologico

Proprietà delle mappe olomorfe.

1) <u>Principio di identità</u>:

Siano X, Y sup. di Riemann
$F, G : X \to Y$ olomorfe
~~Allora~~ Sia $S := \{x \in X \mid F(x) = G(x)\}$.
Allora o $S = X$ oppure S è discreto in X.

Dim. per esercizio.

2) Teorema delle mappe aperte:

Siano $F: X \to Y$ olomorfa e non costante. Allora F è un'applicazione aperta.

Dim. per esercizio

<u>Coroll.</u> Sia $F: X \to Y$ olomorfa e non costante. Allora $F^{-1}(y)$ è discreta in X $\forall y \in Y$.
(segue dal principio d'identità).

<u>Teorema.</u> Sia X una superficie di R. <u>cpta</u> e $F: X \to Y$ una ~~funzione olomorfa~~ mappa olomorfa non costante.
Allora:
1) F è suriettiva
2) Y è compatta
3) $\forall y \in Y$ $F^{-1}(y)$ è finito (non $\emptyset$).

$\boxed{\text{DIM}}$. F non costante $\Rightarrow$ aperta $\Rightarrow F(X)$ aperto in Y
. X cpto $\Rightarrow F(X)$ cpto $\Rightarrow F(X)$ chiuso in Y
$\Rightarrow Y = F(X)$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ / sfera di Riemann

$\downarrow$ due carte locali: $\mathbb{C} \ni z \mapsto (z:1)$, $\mathbb{C} \ni w \mapsto (1:w)$

$\downarrow$ $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ due carte locali

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{C}_\infty$ sono biolomorfi tramite

$$F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_\infty$$
$$(z:1) \mapsto z$$
$$(1:0) \mapsto \infty.$$

Sia X una superficie di Riemann. C'è una corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{funzioni meromorfe } f \\ \text{su } X \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{mappe olomorfe} \\ F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty \\ \text{~~non costanti~~} \end{array} \right\}$$

non costante in...

Vediamo come. Data $f \in \mathcal{M}(X)$, definiamo
$$F : X \to \mathbb{C}_\infty$$
ponendo:
$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{se } x \text{ non è un polo} \\ \infty \in \mathbb{C}_\infty & \text{se } x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

Equivalentemente:

$F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

è data da:

$$F(x) = \begin{cases} (f(x) : 1) & \text{se } x \text{ non è un polo} \\ (1 : 0) & \text{se } x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

• per ~~dif...~~ verificare che F è olomorfa:

nell'intorno di un pto $x_0 \in X$ che non è un polo

$(z : 1) \overset{\psi_0}{\longmapsto} z \in \mathbb{C}$ è una carta locale di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi_0"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

f olom. nell'intorno di $x_0 \in X$

$\Rightarrow F$ è olomorfa nell'intorno di $x_0 \in X$

• Se $x_0 \in X$ è un polo per f, allora nell'intorno U di x_0 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ è olomorfa in x_0 e nulla in x_0

$\Rightarrow$ ~~nell'intorno U di~~ in $U \setminus \{x_0\}$ abbiamo

$$F(x) = (f(x) : 1) = \left(\frac{1}{g(x)} : 1\right) = \underbrace{(1 : g(x))}_{\text{vale nel pto } U}$$

$$F(x_0) = (1 : g(x_0)) = (1 : 0)$$

Consideriamo l'altra carta locale di $\mathbb{P}^1$:

$(1 : w) \overset{\psi_1}{\longmapsto} w \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi_1"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

g olomorfa

$\Rightarrow F$ è olomorfa in U

$\Rightarrow F$ è olomorfa su X.

Viceversa:
sia data $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, non costante in $(1:0)$

$\Rightarrow S := F^{-1}\{(1:0)\}$ è un sottoinsieme discreto di X

$(z_0 : z_1)$

$$F(X \setminus S) \subseteq U_1 := \{z_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$U_1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(1:0)\}$$

$\Rightarrow F_{|X \setminus S} = (f(x) : 1)$

$f : X \setminus S \to \mathbb{C}$

Esercizio: Verificare che f è ~~meromorfa~~ olomorfa su $X \setminus S$ e ha dei poli in S.

$\Rightarrow f$ è meromorfa su X.