- Data X superficie di Riemann

$$F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \text{ non costante in } (1:0)$$

$$S := F^{-1}((1:0)) \quad \text{discreto in } X$$

$$F_{|X \setminus S} = (f(x) : 1) \qquad f : X \setminus S \to \mathbb{C}$$

- f è la composizione di $F_{|X \setminus S}$ con la carta locale di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \supset U_1 = \{t_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}, \qquad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

$\boxed{F \text{ olomorfa} \Rightarrow f \text{ olomorfa su } X \setminus S}$

Posto $Z := F^{-1}((0:1))$

- g è regolare e nulla in Z

$$F(X \setminus Z) \subseteq U_0 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(0:1)\}$$

$$\Rightarrow F_{|X \setminus Z} = (1 : g(x)) \qquad g : X \setminus Z \to \mathbb{C}$$

- g è la composizione di $F_{|X \setminus Z}$ con ~~la carta~~ l'altra carta locale di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \supset U_0 = \{t_0 \neq 0\}$

$$U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \qquad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_1}{z_0}$$

Su $X \setminus S \setminus Z$ si ha:

$$(f(x) : 1) = (1 : g(x)) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

- $\frac{1}{f}$ è olomorfa in $S \Rightarrow f$ ha dei poli in S

$\Rightarrow f \in \mathcal{M}(X)$.

OSS Se X è una sup. di Riemann cpta, allora $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ non costante

$\Longleftrightarrow \exists F : X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Esercizio Sia X compatta e $f \in \mathcal{M}(X)$ non costante. Mostrare che f ha almeno uno zero e almeno un polo.

Sia f meromorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$

$\mathrm{ord}_{z_0} f = m \in \mathbb{Z}$ se localmente

$$f = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n$$

con: $\boxed{a_m \neq 0}$

- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) < 0 \Longleftrightarrow f$ ha un polo in z_0, e in tal caso $|\mathrm{ord}_{z_0}(f)|$ è l'ordine del polo
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0 \Longleftrightarrow f$ è olomorfa e non nulla in z_0
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) > 0 \Longleftrightarrow f$ è olomorfa e nulla in z_0, e in tal caso $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ è l'ordine dello zero.

Se $\varphi : U(w_0) \xrightarrow{\sim} U(z_0)$ è un biolomorfismo
$\cap$
$\mathbb{C}$

allora $\mathrm{ord}_{w_0}(f \circ \varphi) = \mathrm{ord}_{z_0} f$

· verificare per esercizio

no si definisce $\mathrm{ord}_p f$ $\forall f$ meromorfa su $p \in X$ sup. di R.

<u>Varietà proiettive complesse</u>

$\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ varietà complessa

$X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ connesso

Diciamo che X è una SOTTOVARIETÀ COMPLESSA di $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, di dimensione n,

se

$\forall p \in X$ $\exists U_j$ aperto affine di $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ contenente p $j \in \{0, \dots, N\}$
$\|$
$\mathbb{C}^N_{x_1, \dots, x_N}$

$\exists V$ intorno aperto di p in $\mathbb{C}^N = U_j$
t.c. $X \cap V$ sia il grafico di $N-n$ funzioni olomorfe:
cioè (a meno di riordinare $x_1 \dots x_N$)
$\exists g_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, g_N(x_1, \dots, x_n)$
olomorfe $U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

ALTRI ~~~~ ESEMPI DI SUPERFICI DI RIEMANN.

1) Grafici di funzioni olomorfe:

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto

$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa

$\Gamma_f \subset \mathbb{C}^2$

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$

- Γ_f è una superficie di Riemann con un'unica carta

$\pi : \Gamma_f \to U \subseteq \mathbb{C}$ proiezione nel primo fattore.

Lo stesso se $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{C}$ olomorfe

$\leadsto \Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ grafico di $(f_1, \dots, f_n)$.

2) Il teorema della funzione implicita vale nel caso olomorfo esattamente come ~~~~ nel caso C^∞. In particolare:

<u>Teorema</u> Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2_{z,w}$ aperto

$F : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa $\qquad X = \{p \in \Omega \mid F(p) = 0\}$

$p_0 = (z_0, w_0) \in X$

t.c. $\dfrac{\partial F}{\partial w}(p_0) \neq 0$. Allora

$\exists\, \Omega_0 \subseteq \Omega$ intorno aperto di p_0 t.c.

$X \cap \Omega_0$ è il grafico di una funzione olomorfa $w = f(z)$ in $U(z_0)$.

e lo stesso rispetto all'altra variabile.

ES. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ aperto, e $F: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, $X := \{p \in \Omega \mid F(p) = 0\}$. Supp. X connesso. Se $\forall p \in X$ si ha $\nabla F(p) \neq 0$, allora X è una sup. di R. Topol.: $X \subset \mathbb{C}^2$ è Hausdorff e a base numerabile.

Infatti: $\forall p \in X$ le proiezioni su uno degli assi sono carte locali e i cambi di coordinate sono:

- identità
- olom. $w = f(z)$

In particolare:

ES curve piane affini, lisce.

Sia $F \in \mathbb{C}[z, w]$ polinomio irriducibile

$$X = V(F) \subset \mathbb{C}^2$$

X è liscia se $p \in X$, $\nabla F(p) \neq 0$.

Allora X è una sup. di Riemann.

(la connessione non è ovvia ma segue dall'irrid. di F).

- X non è mai cpta.

~~Es. 4~~ p. 13 Miranda :

Sia $F(z,w) = w^2 - h(z)$ $h \in \mathbb{C}[z]$.

1) Mostrare che F è irrid. sse h non è un quadrato.

2) Mostrare che $\{F=0\}$ è liscio sse $h(z)$ ha radici distinte.

3) Curve proiettive piane.

Sia $\underset{V(F)}{\underset{\shortparallel}{X}} \subset \mathbb{P}^2$ F omogeneo di grado d

e supponiamo X liscia, cioè

$\forall p \in X \quad DF(p) \neq \underline{0}$.

Allora X è una superficie di Riemann cpta.

Infatti:

Sia $U_i := \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$

$X_i := X \cap U_i \subset \mathbb{C}^2$ curva alg. affine

X_i è non singolare

$\Rightarrow$ ~~esistono~~ in ogni pto una carta locale una carta locale è data da una proiezione su uno dei due assi in $\mathbb{C}^2$.

i cambiamenti di coord. sono olomorfi.
(verifica per esercizio).

- X è connesso: ~~infatti~~
(non ovvio)

. F è necessariamente irrid.
perché se fosse riducibile
$F = F_1 \cdot F_2$ → visto in esercitazioni
X proiettiva $\Rightarrow$ $\exists\, p$ t.c. $F_1(p) = F_2(p) = 0$
$\Rightarrow p$ sing. per F.

Es Siano $X \subset \mathbb{P}^2$ curva liscia.
Siano $G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ omogenei
dello stesso grado, con $H_{|X} \neq 0$.
Mostrare che $f = \frac{G}{H}$ è una funzione
meromorfa su X.

Curve proiettive:

Consideriamo $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ connesso
e chiuso.

Diciamo che X è una sottovarietà
complessa di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, di dim. 1, se:

$\forall p \in X$ $\exists\, U_j$ aperto affine di $\mathbb{P}^n$, contenente p
$U_j = \mathbb{C}^n_{x_1, \dots, x_n}$

$\exists\, V$ intorno aperto di p in U_j
t.c. $X \cap V$ è il grafico di $n-1$
funzioni olomorfe:
$\mathbb{C}^n$

mod. è a meno di riordinare le variabili

$\exists\ f_1, \dots, f_{n-1} : \underset{\underset{\mathbb{C}}{\cap}}{U} \to \mathbb{C}$ olomorfe

t.c. $X \cap V = \{(x, f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) \mid x \in U\}$.

$\leadsto$ la proiezione $X \cap V \to \mathbb{C}_{x_1}$

è una carta locale su X

$\leadsto$ X è una sup. di Riemann, ed è chiusa in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ $\Longrightarrow$ è cpta — la stessa dif. si può dare per dim $X > 1$

- una varietà complessa cpta si dice (sottov. complessa di $\mathbb{P}^n$) PROIETTIVA se è biolomorfa a una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

- Vedremo che: <u>tutte le superfici di R. cpte sono proiettive!</u>

(Falso per dim $X \geq 2$). (Per esempio: la maggior parte dei tori complessi di dim. ≥ 2 <u>non</u> sono proiettivi).

<u>Teorema di Chow</u>: <u>Ogni sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è una sottovarietà algebrica</u>.

<u>Es</u> Sia $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una conica di rk max.
Mostrare che X è biolomorfa a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

<u>Es</u> Siano $X, Y \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ curve non singolari.
Sia $f : X \to Y$ un morfismo algebrico.
Mostrare che f è una mappa olomorfa.

<u>Prop.</u> (forma normale locale).

Siano X, Y due superfici di Riemann e $F: X \to Y$ olomorfa non costante.

Sia $p \in X$.

Esiste ed è unico un intero $m \geq 1$ t.c. per ogni carta locale $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ di Y centrata in $F(p)$ (cioè $F(p) \in U_2$ e $\varphi_2(F(p)) = 0$)

esiste una carta locale $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ di X centrata in p t.c. l'espressione di F nelle carte locali sia

$$z \mapsto z^m$$

cioè $(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})(z) = z^m$

. m è detto MOLTEPLICITÀ di F in p

" $\mathrm{mult}_p F$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Fissiamo una carta locale $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ per Y, centrata in $F(p)$.

Scegliamo una carta locale $\psi : U \to V$ per X, centrata in p.

Sia $T : V \to V_2$ l'espressione di F nelle carte locali

$$T(w) = \varphi_2(F(\psi^{-1}(w)))$$

$T(0) = 0$, T olomorfa

Sia $m = \mathrm{ord}_0 T$.

Abbiamo:
- $m \geq 1$
- m è l'ordine della prima derivata non nulla di T in $w=0$

~~localmente~~ $T(w) = \sum_{n \geq m} a_n w^n =$

$$= w^m \underbrace{\sum_{n \geq m} a_n w^{n-m}}_{\text{olom. } \neq 0 \text{ in } U(0)}$$

⇝ la posso scrivere come $h(w)^m$ con h olom. e non nulla in $U(0)$

$$\leadsto T(w) = (\underbrace{w\, h(w)}_{\eta(w)})^m$$

$\eta(w)$ biolom. locale, $\eta(0) = 0$

perché $\eta'(0) \neq 0$.

tra due intorni dell'origine in $\mathbb{C}$.

Poniamo $\varphi_1 := \eta \circ \varphi : U_1 \longrightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$, $\quad U_1 \subseteq U$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_1"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

- φ_1 è ancora una carta locale
- $\varphi_1(p) = \eta(\varphi(p)) = \eta(0) = 0$.

L'espressione di F rispetto alle nuove carte φ_1 e φ_2 è

$$\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z)) =$$
$$= \varphi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))$$
$$= T(\eta^{-1}(z)) = (\eta(\eta^{-1}(z)))^m$$
$$(z = \eta(w)) \qquad = z^m$$

Allora: oss. che per ogni intorno A di p $\exists \tilde{A} \subseteq A$ intorno aperto di p t.c. se consideriamo la restrizione $F_{|\tilde{A}}: \tilde{A} \to \underbrace{F(\tilde{A})}_{\text{intorno aperto di } F(p)}$

si ha:

1) p è l'unica controimm. di $F(p)$ in $\tilde{A}$ $\qquad z \mapsto z^m$

2) ogni punto $q \in F(\tilde{A})$ diverso da $F(p)$ ha esattamente m controimm. in $\tilde{A}$

$\Rightarrow$ m dipende solo dalle proprietà di F nell'intorno di p.

$\Rightarrow$ non dipende dalle φ_2 carte locali di 4 scelte inizialmente

OSS 1

$m = 1 \Longrightarrow$ F è biolom. locale in p (cioè è biolom. tra un intorno aperto di p in X e un intorno aperto di $F(p)$ in Y)

$m > 1 \Longrightarrow$ F non è iniettiva in nessun intorno di p

⇝ sono equivalenti:

(i) $\mathrm{mult}_p F = 1$

(ii) F è biolom. locale in p

(iii) F è iniettiva in un intorno di p.

OSS 2 Siano $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to V_2$

t.c. $\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m \quad \forall z \in U_1$

$\forall q \in U_1 \setminus \{p\}$, $\exists$ un intorno A_q di q in U_1 t.c. $F_{|A_q}$ sia iniettiva

(perché $z \mapsto z^m$ è ~~omeom. top.~~ localm. iniettiva in ogni $z \neq 0$).

$\Longrightarrow \forall q \in U_1 \setminus \{p\}$, $\mathrm{mult}_q F = 1$.

Cor. I punti $p \in X$ in cui $\mathrm{mult}_p F > 1$ formano un sottoinsieme discreto di X.

Def Sia $F: X \to Y$ mappa olomorfa non costante.

Un punto $p \in X$ è detto PUNTO DI RAMIFICAZIONE per F se $\mathrm{mult}_p F > 1$.

Un punto $q \in Y$ è detto PUNTO DI DIRAMAZIONE per F se $q = F(p)$ con p di ramificazione.

$\rightsquigarrow$ se X è cpta, F ha un numero finito di punti di ramificazione e di diramazione.

ES. $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$F(z_0 : z_1) = (z_0^2 : z_1^2).$$

$$U_1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(1:0)\}$$

$(z:1)$ $\qquad F(z:1) = (z^2 : 1)$

$z = \dfrac{z_0}{z_1}$ $\qquad$ • F è olomorfa

$U_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ $\qquad F(U_1) = U_1$

$\varphi(z_0 : z_1) = \dfrac{z_0}{z_1}$

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] & U_1 \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "z \mapsto z^2"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

• $\mathrm{mult}_{(0:1)} F = 2$

• $\mathrm{mult}_p F = 1$ $\qquad \mathrm{mult}_{(1:0)} F = 2$

$\forall p \neq (0:1), (1:0)$

Nota:

$F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(0:1),(1:0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,1),(1:0)\}$

è un rivestimento topologico di grado 2

$\rightsquigarrow$ ogni pto ha 2 controimm.

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ z \longmapsto z^2 \end{array} \right)$$

- $(0:1)$, $(1:0)$ hanno una sola controimm.

Teorema (grado). Sia $F : X \to Y$ mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann cpte.

Sia $y \in Y$ sia

$$d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} \mathrm{mult}_p F .$$ finito

Allora $d_y(F)$ non dipende da y, ed è detto GRADO di F $\deg F$.

dim Sia $y_0 \in Y$ $F^{-1}(y_0) = \{x_1 \dots x_a\}$

Esistono coordinate locali

w su Y, centrate in y_0

z_i su X, centrate in x_i $\forall i = 1, .., a$

t.c. nell'intorno di x_i, l'espressione locale di F sia

$w = z_i^{m_i}$ $\quad m_i = \text{mult}_{x_i} F$ (13)

Più precisamente:

sia $\Delta_\varepsilon \subset Y$ l'intorno aperto di y_0 corrispondente a $D(0,\varepsilon)$ tramite la carta locale

e sia $\Delta_i \subset X$ l'intorno aperto di x_i corrispondente a $D(0, \varepsilon^{\frac{1}{m_i}})$ tramite la carta locale z_i

- $F(\Delta_i) = \Delta_\varepsilon \quad \forall i$

$$\Rightarrow F^{-1}(\Delta_\varepsilon) \supseteq \bigcup_{i=1}^{a} \Delta_i$$

Se $\boxed{F^{-1}(\Delta_\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{a} \Delta_i}$, allora: $\forall y \in \Delta_\varepsilon \setminus \{y_0\}$

- y ha esattamente m_i controimmagini in ogni Δ_i e non ne ha altre
- F ha molt. 1 in queste controimm.

$$\Rightarrow d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p F =$$

$$= m_1 + \dots + m_a = d_{y_0}(F)$$

$\Rightarrow d_y(F)$ è costante su Δ_ε.

$\Rightarrow d_y(F) : X \to \mathbb{N}$ è localm. costante

$\Rightarrow d_y$ è costante.

~~Vogliamo mostrare~~ Basta quindi mostrare che per ε suff. piccolo si ha a

$$F^{-1}(\Delta_\varepsilon) = \bigcup_{i=1} \Delta_i .$$

Per assurdo: $\varepsilon = \frac{1}{n}$ supp. che

$\forall n \geq n_0 \quad \exists y_n \in \Delta_{\frac{1}{n}} \subset \Delta_\varepsilon$

$\exists x_n \in F^{-1}(y_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{a} \Delta_i$

$\rightsquigarrow \{y_n\}$ in Y $\qquad F(x_n) = y_n$

$\{x_n\}$ in X

$\cdot\, y_n \to y_0$ per $n \to +\infty$

X cpto $\Rightarrow \{x_n\}$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a $\tilde{x} \in X$.

Per continuità $F(\tilde{x}) = y_0$

$\Rightarrow \tilde{x} \in \{x_1, \dots, x_a\}$, per esempio $\tilde{x} = x_1$.

Δ_1 intorno aperto di x_1

$\Rightarrow \exists k_0$ t.c. $x_{n_k} \in \Delta_1 \quad \forall k \geq k_0$ $\lightning$

Data $F: X \to Y$ olomorfa non costante tra sup. di Riemann cpte, allora:

se F ha grado $\underline{d}$

$\forall y \in Y$ non di diramazione si ha

$$|F^{-1}(y)| = d$$

e $\forall y \in Y \quad |F^{-1}(y)| \leq d$.

Siano $\{y_1, \dots, y_r\}$ i punti di diramazione. ~~Allora~~

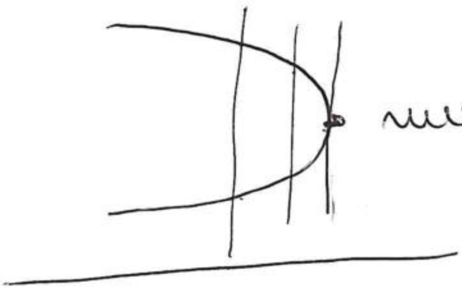
$$F_{|X \setminus F^{-1}(\{y_1 \dots y_r\})}:$$

$$: X \setminus \underbrace{F^{-1}(\{y_1 \dots y_r\})}_{\#\text{ finito di punti}} \longrightarrow Y \setminus \{y_1 \dots y_r\}$$

è un rivestimento topologico di grado d.

F si dice un RIVESTIMENTO RAMIFICATO

Es: $d = 2$



$d = 3$ in X • molt. 2 • molt. 1 • molt 3

• in Y • in Y

OSS (Relazione tra molteplicità e ordine).

Sia $F: X \to Y$ olom. non costante

$p \in X$

~~Siano~~ Sia $f: U \overset{\subseteq \mathbb{C}}{\longrightarrow} V^{\subseteq \mathbb{C}}$ un'espressione

di F in carte locali di X e Y
negli intorni di p e $F(p)$
$p \leftrightarrow z_0 \in U$ $\quad F(p) \leftrightarrow f(z_0) \in V$

Allora:

$$\text{mult}_p F = \text{ord}_{z_0} \underbrace{(\underbrace{f - f(z_0)}_{\text{olomorfa e nulla in } z_0})}_{\text{ordine della prima derivata} \neq 0 \text{ in } z_0.}$$

(segue dalla dim della forma normale locale).

~~Es~~ Esercizi del Miranda.

Es. A pag. 38

Consideriamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Fissiamo $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e un insieme finito $S \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con $p \notin S$.
Mostrare che $\exists f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ con uno zero semplice in p e senza zeri/poli nei pti di S.

Es. F p. 53

X sup. Riemann cpta, $f \in \mathcal{M}(X)$ non costante.
Mostrare che f è una coordinata locale in ogni pto di X tranne che un numero finito di pti.

Es. G p. 53

Sia $f(z) = \dfrac{z^3}{1-z^2} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$

1) Trovare tutti i punti in cui $\mathrm{ord}_p f \neq 0$

2) Considerare la mappa $F: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ associata a f. Mostrare che F ha grado 3 e trovare i suoi pti di ramificazione e diramazione.