Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann

GEO NP L7

1) Sia U un intorno di ∞ in $\mathbb{C}_\infty$ e $f : U \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Il comportamento di f in ∞ è dato dal comportamento in $w=0$ di:

$$g(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

2) Sia $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale

$p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$; $f \in \mathbb{C}(z)$, p, q primi tra loro

Allora:

- f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{$zeri di $q\}$
- f è meromorfa su $\mathbb{C}$
- $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \dfrac{p\left(\frac{1}{w}\right)}{q\left(\frac{1}{w}\right)}$ è ancora una funzione razionale

$\Rightarrow$ g è meromorfa in $w=0$

$\Rightarrow$ f è meromorfa in $z=\infty$

$\Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$.

Più precisamente: sia $f \neq 0$, e scriviamo

$$f = c \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{e_i}$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $e_i \in \mathbb{Z}$

Allora:

$$\operatorname{ord}_z f = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$$

$$\operatorname{ord}_{z_i} f = e_i$$

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = c \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{w} - \lambda_i\right)^{e_i}$$

$$= c \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(1-\lambda_i w)^{e_i}}{w^{e_i}} =$$

$$= c \, \frac{\prod_{i=1}^{r} (1-\lambda_i w)^{e_i}}{w^{\sum_{i=1}^{r} e_i}}$$

dove $\neq 0$ in $w \neq 0$

ha ordine $-\sum_{i=1}^{r} e_i$ in $w=0$

$$\Rightarrow \operatorname{ord}_\infty f = -\sum_{i=1}^{r} e_i$$

Nota: $\sum_{i=1}^{r} e_i = \boxed{\deg p - \deg q}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{ord}_\infty f = \deg q - \deg p}$$

Oss. anche che: $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} \operatorname{ord}_z f = 0.$

Prop ~~Sia f~~ $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}(z)$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Abbiamo già visto che
$$\mathbb{C}(z) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$$
Viceversa sia $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$

f ha un numero finito di zeri e poli: siano $\lambda_1 \dots \lambda_r$ gli zeri e poli in $\mathbb{C}$

con ordini $e_1, \dots, e_r$

Sia $g(z) := \prod_{i=1}^{r} (z-\lambda_i)^{e_i}$

meromorfa in $\mathbb{C}$.

Sia $h(z) := \dfrac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$

- h è olomorfa in $\mathbb{C}$, mai nulla

$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ sviluppo di Taylor in $\mathbb{C}$

Ma h è meromorfa all'∞

$\Rightarrow k(w) := h\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^{-n}$

ha al più un polo in $w=0$

$\Rightarrow$ ~~...~~ k ha un numero finito di termini

$\Rightarrow h$ è un polinomio e mai ha zeri in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow h$ è costante

$\Rightarrow f = \delta g$.

$\rightsquigarrow$ ogni funzione meromorfa in $\mathbb{C}_\infty$ è algebriche, e solo se

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} \mathrm{ord}_z f = 0$$

(f ha "tanti zeri quanti poli")

<u>Esercizio</u>: Mostrare che se

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$$

con coord $(z : w)$

allora $f = \dfrac{F(z,w)}{G(z,w)}$ F, G polinomi omogenei dello stesso grado.