GEOMETRIA SUPERIORE 10/11/2022

Applicazioni del Teorema del grado (1)

__Coroll.__ Sia $F : X \to Y$ mappa olomorfa non costante tra superfici di Riemann cpte. Allora F è isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\deg F = 1$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $(\Rightarrow)$ ovvio

$(\Leftarrow)$ Se $\deg F = 1$, allora F è iniettiva $\Rightarrow$ è biunivoca; inoltre $\text{mult}_p F = 1$ $\forall p \in X$ $\Rightarrow$ F è biolomorfismo tra un intorno di p e un intorno di $F(p)$

$\Rightarrow F^{-1} : Y \to X$ è olomorfa.

__Prop__ Sia X una sup. di R. cpta e $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Allora

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p f = 0.$$

(f ha "tanti zeri quanti poli").

__Nota__: se $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, f è razionale e si verifica direttamente (fare per esercizio!)

(Dim.) Osserviamo che la somma è finita perché f ha un numero finito di zeri e poli.

Sia $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la mappa associata a

f. Allora:

- zeri di f = controimmagini di $(0:1)$
- poli di f = controimmagini di $(1:0)$

Sia $x_0 \in X$ uno zero di f. Allora localmente $F(x) = (f(x):1)$

e f è un'espressione di F in coord. locali su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$f(x_0) = 0$

$\rightsquigarrow$ $\text{mult}_{x_0} F = \text{ord}_{x_0}(f - f(x_0)) =$

$= \text{ord}_{x_0} f$.

Sia $x_1 \in X$ un polo di f. Allora localmente in x_1 $F(x) = (1 : g(x))$

- g è un'espressione locale per F in x_1
- $g(x_1) = 0$

$\text{mult}_{x_1} F = \text{ord}_{x_1} g$

Ma: $(f(x):1) = (1:f(x))$ fuori dagli zeri e dai poli

$\Rightarrow g = \frac{1}{f}$

$\Rightarrow \text{ord}_{x_1} g = -\text{ord}_{x_1} f$.

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}((0:1))} \text{mult}_x F = \sum_{x \in F^{-1}((1:0))} \text{mult}_x F$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{x \in F^{-1}((0:1))} \mathrm{ord}_x f + \sum_{x \in F^{-1}((1:0))} \mathrm{ord}_x f$$

$$= \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x f .$$

<u>Prop</u> Sia X una superficie di Riemann cpta t.c. esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ avente un unico polo, ~~semplice~~ di ordine 1. Allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

DIM. Sia $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la mappa olomorfa associata a f. Dalla dim. precedente vediamo che $\deg F = 1 \Rightarrow F$ è isomorfismo

---

<u>Formula di Hurwitz.</u>

X sup. di Riemann cpta

- X è una superficie topol. cpta e orientabile di genere $g(X)$

Se prendiamo una triangolazione di X con: v vertici, e lati, f triangoli

allora $\underbrace{\chi_{TOP}(X)}_{\text{caratteristica di Eulero}} = v - e + f = 2 - 2g(X)$

Teorema (formula di Hurwitz). ④
Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante tra superfici di Riemann cpte. Allora:

$$2g(X)-2 = (\deg F)\cdot(2g(Y)-2) + \underbrace{\sum_{p\in X}\left[\mathrm{mult}_p F - 1\right]}$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ La somma ha senso perché i punti di ramificazione sono finiti.
Consideriamo i punti di diramazione di F in Y (in numero finito), e scegliamo una triangolazione per Y t.c. ogni pto di diramazione sia un vertice.
Siano: v il numero di vertici
e il numero di lati
f " " triangoli.

Solleviamo la triangolazione a X tramite la mappa F.

$$\boxed{v-e+f = 2-2g(Y)}$$

- i vertici della triangolazione di X sono le controimmagini dei vertici in Y.
- se $e \subset Y$ è un lato aperto della triangolazione, $F^{-1}(e) \to e$ è un rivestimento topologico di grado d

Ma ℓ è contraibile
$\Rightarrow F^{-1}(\ell) = \ell_1 \sqcup \dots \sqcup \ell_d$
t.c. $F_{|\ell_i} : \ell_i \to \ell$ è omeom.
$\rightsquigarrow$ otteniamo d lati in X.

- Se $D \subset Y$ è l'interno di un triangolo, $F^{-1}(D) = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_d$ con $F_{|D_i} : D_i \to D$ omeomorfismo.

$\rightsquigarrow$ otteniamo una triangolazione in X con v' vertici, ℓ' lati, f' facce e:
$f' = d \cdot f$, $\ell' = d \cdot \ell$. $(d = \deg F)$

Dobbiamo calcolare $v' = |F^{-1}(\text{vertici di } Y)|$

Sia $q \in Y$ un vertice. Allora

$$|F^{-1}(q)| = \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} 1\right) - d + d =$$

$$= \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} 1\right) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p F + d =$$

(con $d = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p F$)

$$= d + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \mathrm{mult}_p F)$$

$$v' = \sum_{q \text{ vertice in } Y} |F^{-1}(q)| = \sum_{q \text{ vertice in } Y} \Big(d + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \mathrm{mult}_p$$

(6)

$$= d\cdot v - \sum_{\substack{p \text{ vertice} \\ \text{di } X}} (\operatorname{mult}_p F - 1) =$$

$$= d\cdot v - \sum_{p\in X} (\operatorname{mult}_p F - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2g(X) - 2 = -\chi_{Top}(X) = -v' + e' - f'$$

$$= -d\cdot v + \sum_{p\in X} (\operatorname{mult}_p F - 1) + d\cdot e - d\cdot f$$

$$= d\underbrace{(-v + e - f)}_{2g(Y)-2} + \sum_{p\in X} (\cdots\cdots) =$$

$$= (\deg F)(2g(Y)-2) + \sum_{p\in X} (\operatorname{mult}_p F - 1).$$

<u>Applicazioni</u>: Se $F: X \to Y$ olomorfa non costante tra superfici di R. <u>cpte</u>.

1) $g(X) \geq g(Y)$.

Infatti: $g(X) = 1 + \overbrace{(\deg F)}^{\geq 1}(g(Y) - 1) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{p\in X} (\operatorname{mult}_p F -}_{\geq 0}$

$$\geq 1 + g(Y) - 1$$
$$\shortparallel$$
$$g(Y)$$

2) Se F non è isomorfismo, allora:

$$\begin{cases} g(X) > g(Y) \\ g(X) = g(Y) \leq 1. \end{cases}$$

Infatti se F non è isomorfismo, allora $\deg F \geq 2$

$$\Rightarrow g(X) \geq 1 + 2(g(Y)-1) = $$
$$= 2g(Y) - 1 \cancel{\geq g(Y) \text{ se}}$$

$$2g(Y) - 1 > g(Y) \quad \text{se } g(Y) \geq 2.$$

3) Sia $Y = \mathbb{P}^1$: $F : X \to \mathbb{P}^1$
Se F non è isomorfismo, allora F deve ramificare.

Infatti:

$$\underbrace{2g(X) - 2}_{\geq -2} = \underbrace{(\overbrace{\deg F}^{\geq 2}) \cdot (-2)}_{\leq -4} + \underbrace{\sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p F - 1)}_{\neq 0}$$

4) Se X e Y hanno genere 1, allora F non ramifica $\Rightarrow$ è un rivestimento topologico.

Esercizi

- dal Miranda:

Es. C p. 53:

Siano $F: X \to Y$ e $G: Y \to Z$ mappe olom. non costanti tra sup. di Riemann. Mostrare che se $p \in X$ allora:

- $mult_p(G \circ F) = (mult_p F) \cdot (mult_{F(p)} G)$
- Se $f \in \mathcal{M}(Y)$ (non $\equiv 0$) allora
$$ord_p(\underbrace{f \circ F}_{\in \mathcal{M}(X)}) = (mult_p F) \cdot (ord_{F(p)} f).$$

Es. H p. 54:

Sia $f(z) = \dfrac{4z^2(z-1)^2}{(2z-1)^2}$ vista come funzione meromorfa nella sfera di Riemann.

- Trovare tutti i punti p t.c. $ord_p f \neq 0$
- Considerare la mappa $F: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ associata a f _ Mostrare che $\deg F = 4$ e trovare tutti i pti di ramificazione e di ramificazione _ Verificare la formula di Hurwitz.

Es. K p. 54:

Sia U la curva piana affine di equazione $x^2 = 3 + 10t^4 + 3t^8$.

Sia V la curva piana affine di (9)

equazione $w^2 = z^6 - 1$.

Mostrare che entrambe le curve sono mai singolari.

Mostrare che la mappa $F : U \to V$

data da: $z = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

$$w = \frac{2t\,x}{(1-t^2)^3}$$

è olomorfa e non ramifica mai per $t \neq \pm 1$.

<u>ES.</u> Sia $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mappa olomorfa. Mostrare che F è un morfismo algebrico cioè che $F(x_0 : x_1) = (G(x) : H(x))$

$G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ pol. omogenei dello stesso grado.

<u>ES.</u> Sia $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ un biolomorfismo. Mostrare che F è una proiettività.

<u>ES.</u> Sia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biolomorfismo. Allora F è un'affinità, ovvero $F(z) = az + b \quad a \neq 0$.

Esempi:

1) $X =$ toro complesso

$$\pi : \mathbb{C} \to X = \mathbb{C}/\Gamma \quad \Gamma \text{ reticolo}$$

. π è olomorfa e ha molteplicità 1 in ogni pto.

2) $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$
è olomorfa e ha molt. 1 in ogni punto.

<u>OSS</u> Sia $X \subset \mathbb{C}^2_{x,y}$ curva piana affine non singolare

$$X = V(f)$$

$$f \in \mathbb{C}[x,y] \text{ t.c. } \forall p \in X$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0,0).$$

Sia $p = (x_0, y_0) \in X$.

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$: localmente in p X è grafico di una funzione olomorfa

$$y = g(x) \qquad g : U(x_0) \to \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow X \cap U(p) = \{ (x, g(x)) \mid x \in U(x_0) \}$$

e la proiezione sull'asse x

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$
$$(x,y) \mapsto x$$

è una carta locale per X in p.

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$: allora $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$

e localmente in p X è il grafico di una funzione olomorfa $x = h(y)$ $h: U(y_0) \to \mathbb{C}$

e y è una coord. locale per X in p.

Consideriamo la proiezione

$$\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

come mappa tra superfici di Riemann (olomorfa!)

Calcoliamo $\mathrm{mult}_p \pi$ al variare di p.

- Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$: allora π è una carta locale in p

$$\Rightarrow \mathrm{mult}_p \pi = 1.$$

- Supponiamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$: allora y è una coord. locale per X in p e localmente π è data da

$$x = h(y) \quad \left(\begin{array}{l} \text{espressione} \\ \text{locale} \end{array} \right)$$

Inoltre dal Teorema della funz. implicita

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y)}$$

$= \varphi$

olom. e mai nulla in $U(y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}[x,y]$ è definita una funzione olomorfa $\varphi : X \to \mathbb{C}$

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_{y_0} h'(y) = \mathrm{ord}_p \varphi$ espressione locale

Inoltre $\mathrm{mult}_p \pi = \underbrace{\mathrm{ord}_{y_0}(\underbrace{h(y) - x_0}_{\text{olomorfa e nulla in } y_0})}_{\text{ordine della prima derivata } \neq 0 \text{ in } y_0}$

$$\text{ordine della prima derivata} \neq 0 \text{ in } y_0 = \mathrm{ord}_{y_0} h'(y) + 1 = \mathrm{ord}_p \varphi + 1$$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{ord}_p \varphi + 1}$ (*)

$\pi : X \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $\varphi : X \to \mathbb{C}$

$(x,y) \mapsto x$ $\qquad$ $p \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

$\forall p \in X$ t.c. $\varphi(p) = 0$.

Ma se $\varphi(p) \neq 0$: $\quad \mathrm{ord}_p \varphi = 0$

$\mathrm{mult}_p \pi = 1$

$\Rightarrow$ (*) vale ancora

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{ord}_p \varphi + 1} \quad \forall p \in X.$

Nota: se fisso $x_0 \in \mathbb{C}$ $\quad \pi^{-1}(x_0) = \{ (x_0, y) \mid f(x_0, y) = 0 \}$.

Genere di una curva piana proiettiva. (13)

Sia $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica non singolare di grado d.
$X = V(F)$

$F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ omogeneo di grado d

$\forall p \in X \quad \exists i \in \{0,1,2\}$ t.c. $\frac{\partial F}{\partial z_i}(p) \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ X è una superficie di Riemann compatta.
$\downarrow$ perché X è chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cpto.

(noto: X è sempre connesso).

Vogliamo mostrare che:

$$g(X) = \frac{(d-1)\cdot(d-2)}{2}$$ $\boxed{\text{Formula del genere}}$

A meno di proiettività possiamo supporre che: $(0:1:0) \notin X$.

$\rightsquigarrow$ Consideriamo la proiezione da $(0:1:0)$

$$\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$
$$(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (z_0 : z_2).$$

- π è olomorfa e non costante

$\rightarrow$ dalla formula di Hurwitz:

$$2g(X)-2 = (\deg \pi)\cdot(-2) + r$$

$$r := \sum_{p\in X} (\text{mult}_p \pi - 1)$$

Mostriamo che $\deg \pi = d$ (grado di X) e calcoliamo r.

Consideriamo $U_2 = \{z_2 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\cong \mathbb{C}^2_{x,y}$ $\quad x = \frac{z_0}{z_2}$, $y = \frac{z_1}{z_2}$

$$X_2 = X \cap U_2$$

Nota: $X_2 = \pi^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0)\})$

$$X \setminus X_2 = \pi^{-1}\{(1:0)\}$$

$$\pi_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

$x = \frac{z_0}{z_2}$ espressione locale di π in X_2

X_2 ha equazione $f(x,y)=0$

dove $f(x,y) = F(x, y, 1)$

Nota: $(0:1:0) \notin X \Rightarrow F(0,1,0) \neq 0$

$\Rightarrow z_1^d$ ha coeff. $\neq 0$ in F

$\Rightarrow f$ ha grado d e y^d compare in f

$\Rightarrow$ per $x_0 \in \mathbb{C}$ $\quad \pi_2^{-1}(x_0) = \{y \mid f(x_0,y)=0\}$

$=$ d radici (con molteplicità)

$\Rightarrow \boxed{\deg \pi = d}$

Oss Sia $\underset{V(f)}{\overset{\shortparallel}{X}} \subseteq \mathbb{C}^2_{x,y}$ curva algebrica piana, affine, non singolare, irriducibile

$f \in \mathbb{C}[x,y]$

$\pi : X \to \mathbb{C}$ proiezione sull'asse x
$(x,y) \mapsto x$

Supp. π non costante (cioè X non è una retta ~~verticale~~ verticale
cioè y compare in f)

~~Sia~~ Consideriamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}[x,y] \quad \text{(non costante)}.$$

e hai $\varphi : X \to \mathbb{C}$ la mappa data da $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(φ è olomorfa).

Mostriamo che: $\boxed{\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{ord}_p \varphi + 1}$ $(*)$
$\forall p \in X$.

Infatti:

se p è t.c. $\varphi(p) \neq 0$, cioè $\mathrm{ord}_p \varphi = 0$:

allora $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0 \implies$ nell'intorno di p, X è grafico di una funzione olomorfa $y = g(x)$
$(x, g(x))$

e π è una carta locale $\implies \mathrm{mult}_p \pi = 1$.
$\implies$ vale $(*)$

non avere p né polo né zero $\varphi(p) \neq 0$.

Allora $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$, e X è non singolare

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ e localmente in p X è il grafico di una funzione olomorfa

$$x = h(y)$$

$\Rightarrow$ y è coord. locale

e $h(y)$ è l'espressione locale di π in questa coord. locale.

Se $p = (x_0, y_0)$, abbiamo allora:

$$\operatorname{mult}_p \pi = \operatorname{ord}_{y_0} \left(\underline{h(y) - x_0} \right) =$$

$$= \operatorname{ord}_{y_0} h'(y) + 1$$

Dal teorema della funz. implicita (versione olomorfa):

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y)}$$

} espressione locale di φ

} den. è $\neq 0$ in $U(y_0)$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_{y_0} h' = \operatorname{ord}_p \varphi$

$\Rightarrow$ segue $(*)$.