GEOMETRIA SUPERIORE 21/4/2022

Riprendiamo dalla scorsa lezione (1)
la dim. della formula del genere.

Sia $\varphi \in \mathcal{O}(X_2)$ data dalla polinomio $\frac{\partial f}{\partial y}$

Allora $\forall p \in X_2$ si ha:

OSS. vista l'ultima lezione

$$\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{mult}_p \pi_2 = 1 + \mathrm{ord}_p \varphi$$

$$\Rightarrow \mathrm{mult}_p \pi - 1 = \mathrm{ord}_p \varphi$$

Dobbiamo studiare i punti $p \in \pi^{-1}(\{(1:0)\})$.
Consideriamo allora l'altra carta locale:

$$U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2_{u,v} \qquad u = \frac{z_1}{z_0}, \; v = \frac{z_2}{z_0}$$

$$X_0 := X \cap U_0$$

$$X_0 = V(g) \qquad g(u,v) = F(1,u,v)$$

$$\pi_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u,v) \longmapsto v = \frac{z_2}{z_0}$$

Ci interessano i punti in $\pi_0^{-1}(0)$.

Sia $\psi \in \mathcal{O}(X_0)$ data dal polinomio $\frac{\partial g}{\partial u}$.

Allora $\forall p \in X_0$:

$$\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{mult}_p \pi_0 = 1 + \mathrm{ord}_p \psi.$$

Osserviamo che φ e ψ sono funzioni meromorfe su X. Vediamo che relazione c'è tra loro. Abbiamo:

$$f(x,y) = F(x,y,1) \qquad g(u,v) = F(1,u,v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z_1}(x,y,1) \qquad \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial z_1}(1,u,v)$$

Il cambiamento di coordinate in $\mathbb{P}^2$ tra U_0 e U_2 è dato da:

$$x = \frac{z_0}{z_2} = \frac{1}{v} \qquad y = \frac{z_1}{z_2} = \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(u,v) = \varphi\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z_1}}_{\text{polinomio omog. di grado } d-1}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}, 1\right) = \frac{1}{v^{d-1}} \frac{\partial F}{\partial z_1}(1,u,v) =$$

$$= \frac{1}{v^{d-1}} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{v^{d-1}} \psi(u,v)$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\tilde{\varphi} = \frac{1}{v^{d-1}} \cdot \psi}_{\text{relazione tra funzioni meromorfe su } X} \text{ — regolare in } p \qquad p \in \pi^{-1}(\{(1:0)\}) \in X.$$

$\pi_0 = v = \frac{z_2}{z_0}$ è regolare e nulla in P_{11} $(1:*:0)$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{ord}_p \varphi = \underbrace{\operatorname{ord}_p \psi}_{} - (d-1)\operatorname{ord}_p \pi_0 = \operatorname{mult}_p \pi - 1 - (d-1)\operatorname{mult}_p \pi.}$$

$$\Rightarrow r = \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p \pi - 1) =$$

$$= \sum_{p \in X_2} (\mathrm{mult}_p \pi - 1) + \sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} (\mathrm{mult}_p \pi - 1)$$

$$= \sum_{p \in X_2} \mathrm{ord}_p \varphi + \sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} \left(\mathrm{ord}_p \varphi + (d-1)\, \mathrm{mult}_p \pi \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p \varphi}_{= 0} + (d-1) \underbrace{\sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} \mathrm{mult}_p \pi}_{= \deg \pi = d} =$$

$$= d(d-1).$$

$$\Rightarrow 2g(X) - 2 = -2d + d(d-1)$$

$$\text{-----} \qquad g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

<u>Note:</u> $d = 1 \Rightarrow X$ retta, $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad g = 0$

$d = 2 \Rightarrow X$ conica non sing

$X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad g = 0$

$d = 3$: $\quad g(X) = 1.$

Vedremo che:

$\forall X$ superficie di Riemann cpta

se $g(X) = 0 \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

se $g(X) = 1 \Rightarrow X \cong$ toro complesso

e $X \cong$ cubica piana non sing. in $\mathbb{P}^2$

Mappe tra tori complessi. (dim. 1)

Oss 1 Sia $X = \dfrac{\mathbb{C}}{L}$ L reticolo di $\mathbb{C}$

$\forall x_0 \in X$ possiamo considerare la traslazione

$$T_{x_0} : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x + x_0$$

· T_{x_0} è biunivoca

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ X \end{tikzcd}$$

Sia $a \in \mathbb{C}$ t.c. $\pi(a) = x_0$

Allora abbiamo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, bend left, "\pi"] \\ z \arrow[r, mapsto] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & z + a \\ X \arrow[r, "T_{x_0}"'] & X \end{tikzcd}$$

(c) $z \longmapsto z+a$ è olomorfa su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow T_{x_0}$ è olomorfa, con inversa T_{-x_0} olomorfa

$\Rightarrow T_{x_0}$ è un biolomorfismo $X \to X$.

<u>Oss. 2</u> Siano $X = \dfrac{\mathbb{C}}{L}$, $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$ due tori complessi.

Supponiamo che esista $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (non nulla) $\mathbb{C}$-lineare t.c. $f(L) \subseteq M$.

cioè: $\exists\, \gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ t.c. $\gamma \cdot L \subseteq M$

$(f(z) = \gamma \cdot z)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

f passa al quoziente

- F è olomorfa perché lo è f
- F è omom. di gruppi
- F è suriettiva e non ramifica $\Rightarrow$ è un rivestimento topologico.

Esercizio Mostrare che il grado di F è l'indice di $\underbrace{\gamma \cdot L}_{= f(L)}$ in M.

<u>Prop</u> Siano $X = \dfrac{\mathbb{C}}{\Lambda}$, $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$ due tori

complessi e $F: X \to Y$ mappa olomorfa non costante. Allora F è ~~la~~ una composizione:

$$\underbrace{X \xrightarrow{\tilde{F}} Y}_{\substack{\text{indotta} \\ \text{da mappa} \\ \text{lineare } \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ come sopra}}} \underset{\text{traslazione}}{\longrightarrow} Y$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ A meno di comporre con una traslazione in Y, possiamo supporre $F(0)=0$. Mostriamo che allora F è indotta da una mappa lineare $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- dalla formula di Hurwitz: F è un rivestimento topologico

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F \circ \pi_X : \mathbb{C} \to Y$ è un rivestim. top.

- $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso

$\rightsquigarrow F \circ \pi_X$ è un rivestimento universale di Y

ma anche $\pi_Y : \mathbb{C} \to Y$ è un riv. univ.

e il rivestimento universale è unico a meno di omeom.

$\Rightarrow \exists f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ omeomorfismo

t.c.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

. $F(0)=0 \Rightarrow f(0) \in M \Rightarrow$ a meno di comporre f con la traslazione per $-f(0)$, possiamo supporre che $f(0)=0$.

Vogliamo mostrare che f è lineare.

. F olomorfa $\Rightarrow f$ olomorfa

. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \ell \in L \quad \exists\, \omega(z,\ell) \in M$

t.c. $f(z+\ell) = f(z) + \omega(z,\ell)$

Per ℓ fissato consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z+\ell) - f(z) \end{aligned}$$

. è continua e ha immagine in M discreto

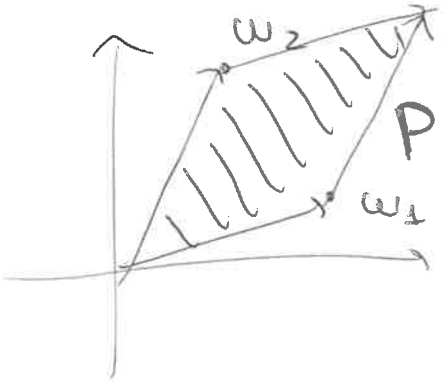
$\Rightarrow$ è costante $\Rightarrow \omega(z,\ell) = \omega(\ell) \in M$

$\Rightarrow f(z+\ell) = f(z) + \omega(\ell) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$\forall \ell \in L$

Deriviamo rispetto a z:

$$f'(z+\ell) = f'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \ell \in L$$

$\Rightarrow f'$ è periodica (invariante) per l'azione di L su $\mathbb{C}$



ω_1, ω_2 generatori di L

$\Rightarrow$ se P (compatto) è $\subset \mathbb{C}$ un parallelogramma fondamentale per L,

allora $f'(\mathbb{C}) = f'(P)$

$\Rightarrow f'$ è limitata $\Rightarrow f'$ è costante per Liouville

$\Rightarrow f(z) = \gamma z.$ ∎

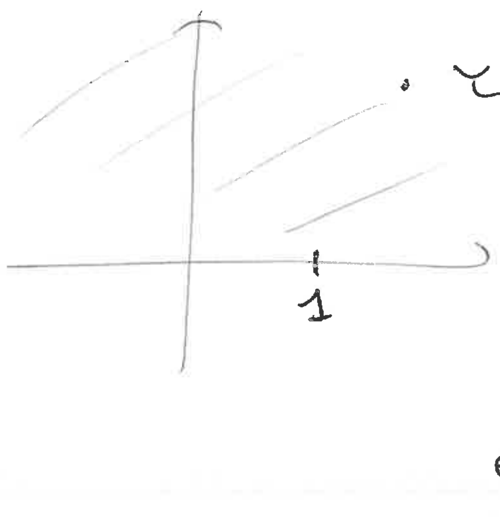
<u>OSS</u> In particolare: $X \cong Y$

$\Longleftrightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c. $\gamma \cdot L = M$.

<u>Isomorfismi tra tori complessi.</u>

Sia $\tau \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\, \tau > 0$

cioè $\tau \in \mathbb{H}$ semipiano superiore



- 1 e τ sono sempre lin. indip. su $\mathbb{R}$

Sia $L_\tau \subset \mathbb{C}$ il reticolo generato da 1 e τ.

e $X_\tau := \dfrac{\mathbb{C}}{L_\tau}$.

Mostriamo che ogni toro complesso è isomorfo a X_τ per qualche $\tau \in \mathbb{H}$. (9)

Infatti: ho $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$

M generato da ω_1, ω_2

Sia $\gamma := \dfrac{1}{\omega_1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

allora la moltiplicazione per γ in $\mathbb{C}$ porta:

$$\omega_1 \longmapsto 1$$

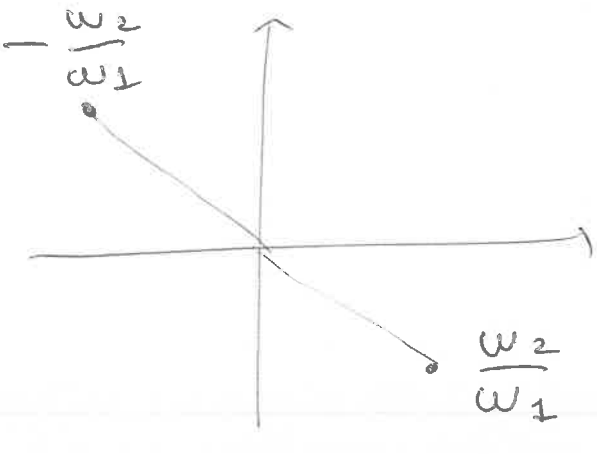
$$\omega_2 \longmapsto \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$\Rightarrow Y \cong \dfrac{\mathbb{C}}{M'}$ $\quad M' =$ reticolo generato da 1 e $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.

- $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im} \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$

- Se $\operatorname{Im} \dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0$: $M' = L_\tau$ con $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$

- Se $\operatorname{Im} \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < 0$: allora



$-\dfrac{\omega_2}{\omega_1} =: \tau$ ha $\operatorname{Im} \tau > 0$

e 1 e τ generano ancora M'

$\Rightarrow M' = L_\tau$.

$\Rightarrow Y \cong X_\tau$.

⟶ per studiare le classi di isom. di tori complessi, bisogna capire: (10)

dati $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ quando $X_\tau \cong X_{\tau'}$?

<u>Prop.</u> $X_\tau \cong X_{\tau'}$

$\iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ t.c.

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $X_\tau \cong X_{\tau'} \iff \exists \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c.

$\underbrace{\gamma \cdot L_\tau}_{\text{reticolo generato da } \gamma,\ \gamma\cdot\tau} = L_{\tau'}$] gruppo ab. gen. da 1 e τ'

$\iff \gamma, \gamma\cdot\tau \in L_{\tau'}$ e lo generano come gruppo

La condizione $\gamma, \gamma\tau \in L_{\tau'}$ diventa:

$$\gamma = c\tau' + d$$
$$\gamma\cdot\tau = a\tau' + b$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\leadsto \tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$$

Inoltre: γ e $\gamma\cdot\tau$ generano $L_{\tau'}$

$\iff$ anche 1 e τ' si possono ricavare in funzione di γ e $\gamma\cdot\tau$ $\iff$ la matrice

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è invertibile in $\mathbb{Z}$.

$\Longleftrightarrow$ $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm 1$. (invertibile in $\mathbb{Z}$).

Esercizio: Mostrare che se

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$$

con $\operatorname{Im} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau' > 0$

allora $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0$

$\rightsquigarrow$ $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1$.

Esercizio Mostrare che

$$\tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau'$$

definisce un'azione del gruppo $SL_2(\mathbb{Z})$ sul semipiano superiore $\mathbb{H}$.

$\rightsquigarrow$ le orbite sono in corr. biunivoca con le classi di isom. di tori complessi di dim. 1.

• $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ dà:

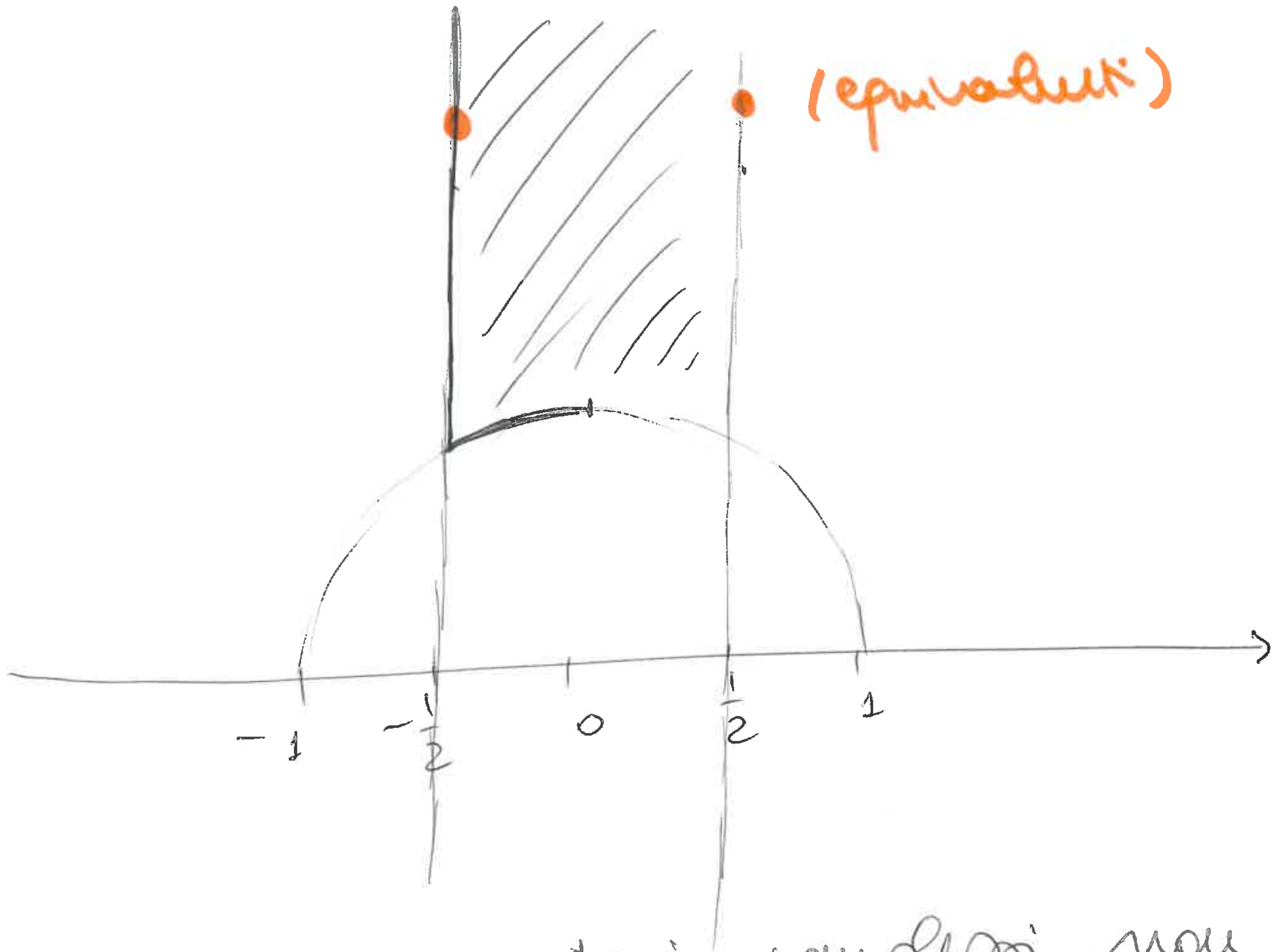
$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ dà:

$$\tau' = \tau + 1$$

$\rightsquigarrow \tau' = \tau + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Questi due elementi generano $SL_2(\mathbb{Z})$.
Si può dimostrare che le orbite sono in corr. 1:1 con la regione:



$\rightsquigarrow$ ci sono ∞ tori complessi non isomorfi (ma saranno tutti omeomorfi e diffeomorfi tra loro).

DIVISORI

ES: $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\qquad \mathcal{M}(X) \cong \mathbb{C}(t)$

$\rightsquigarrow$ ha dim. infinita come spazio vett. su $\mathbb{C}$.

invece: noi vogliamo lavorare con sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}(X)$ che siano di dim. finita.

Tali sottospazi saranno definiti imponendo condizioni su zeri / poli di f

Queste condizioni vengono formalizzate dai divisori.

Sia X superficie di Riemann.

$\mathbb{Z}^X :=$ gruppo abeliano delle funzioni $X \to \mathbb{Z}$ con la somma puntuale.

Se $D \in \mathbb{Z}^X$, il SUPPORTO di D è

$$\operatorname{supp} D = \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

Def Un DIVISORE su X è una funzione $D : X \to \mathbb{Z}$ t.c. $\operatorname{supp} D$ sia un sottoinsieme discreto di X.

- I divisori formano un sottogruppo di $\mathbb{Z}^X$, denotato con $\operatorname{Div}(X)$. (gruppo abeliano)

Se X è compatta: i divisori sono (14)
le funzioni $D : X \to \mathbb{Z}$ con supporto finito
($\rightsquigarrow$ $Div(X)$ è il gruppo abeliano libero sull'insieme X).

Scriveremo D come una somma formale di punti:

$$D = \sum_{p \in X} \underbrace{D(p)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot p .$$

Def. Sia X compatta e $D \in Div(X)$. Il GRADO di D è la somma dei valori di D:

$$\deg D := \sum_{p \in X} D(p) \in \mathbb{Z}$$

$\rightsquigarrow$ il grado definisce un omo di gruppi suriettivo:

$$\deg : Div(X) \longrightarrow \mathbb{Z} .$$

Def. Sia X una sup. di Riemann e $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Il DIVISORE di f è:

$$div(f) = \sum_{p \in X} (ord_p f) \cdot p .$$

(divisore degli zeri e dei poli di f)

I divisori di questo tipo si dicono DIVISORI PRINCIPALI.

Note: Se $f, g \in m(X) \setminus \{0\}$

allora

$$\mathrm{div}(f \cdot g) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{div} : \underbrace{m(X) \setminus \{0\}}_{\text{gruppo moltiplicativo del campo } m(X)} \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$$

è omom. di gruppi, e i divisori principali $\mathrm{PDiv}(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$ formano un sottogruppo di $\mathrm{Div}(X)$.

ES. $X = \mathbb{C}_\infty$

$f \in m(\mathbb{C}_\infty) \setminus \{0\}$ $\quad f = a \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{e_i}$

con: $\lambda_i \in \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$e_i \in \mathbb{Z}$

- f è olomorfa e $\neq 0$ su $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
- $\mathrm{ord}_{\lambda_i} f = e_i$
- $\mathrm{ord}_\infty f = -\sum_{i=1}^{n} e_i$ (verificare per esercizio)

$$\Rightarrow \mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \infty$$

punti di X

coeff. in $\mathbb{Z}$

SOMMA FORMALE

Esercizio Sia $X = \{y^2 = x^5 - x\} \subset \mathbb{C}^2$

1) Mostra che X è una sup. di R.
2) Scrivi $\mathrm{div}(x)$ e $\mathrm{div}(y)$.

Def. Due divisori D_1, D_2 si dicono LINEARMENTE EQUIVALENTI se $D_1 - D_2$ è un divisore principale.

Prop. 1 L'equivalenza lineare è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathrm{Div}(X)$, le cui classi di equivalenza sono i laterali di $\mathrm{PDiv}(X)$ in $\mathrm{Div}(X)$.

dim. per esercizio.

Def
$$\mathrm{Pic}(X) := \frac{\mathrm{Div}(X)}{\mathrm{PDiv}(X)}$$
si dice GRUPPO DI PICARD di X

- è un gruppo abeliano
- i suoi elementi sono classi di equivalenza lineare di divisori.

Prop. 2 Sia X compatta. Allora $\forall f \in m(X) \setminus \{0\}$ si ha:
$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$$
e divisori linearmente equivalenti hanno

lo stesso grado.

$\Rightarrow$ Il grado passa al quoziente e definisce un omo suriettivo

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[D] \longmapsto \deg D$$