# GEOMETRIA SUPERIORE 27/4/2022

1

**Prop** $X$ compatta

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Allora: $\deg$ è isomorfismo $\iff X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\boxed{\Leftarrow}$ Sia $D$ un divisore di grado zero su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}_\infty$ :

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$

dove: $\lambda_i, \infty \in \mathbb{C}_\infty$

$e_i, e_0 \in \mathbb{Z}$

$$0 = \deg D = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_0 .$$

Sia $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{e_i}$.

Allora $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ e $\mathrm{div}(f) = D$

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \deg : \mathrm{Pic}(\mathbb{C}_\infty) \to \mathbb{Z}$ è iniettivo

$\Downarrow$

è isom.

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano $p, q \in X$ distinti e consideriamo $D = p - q$. Allora $\deg D = 1-1 = 0$

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathrm{div}(f) = p - q$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(X \setminus \{q\})$ e $f$ ha un polo semplice in $q$

$\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ infatti la mappa $F: X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ associata a $f$ ha grado 1.

**OSS** Abbiamo mostrato che:

1) su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ due punti sono sempre lin. equiv.

2) su $X$ cpta, se esistono due punti (distinti) lin. equiv., allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

**OSS** Si può vedere che in generale se $X$ è cpta di genere $g$:

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Pic}^0(X) := \ker \deg \qquad \mathrm{Pic}^0(X) \subseteq \mathrm{Pic}(X)$$

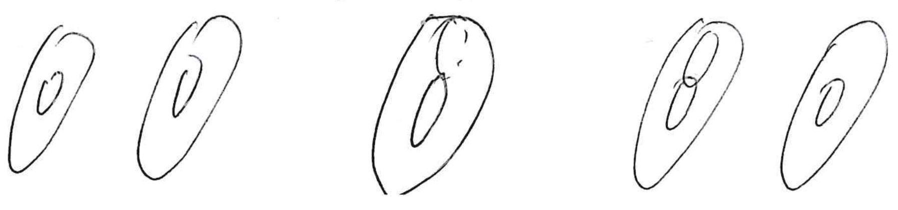
(classi di equiv. lineare di divisori con grado zero)

. $\mathrm{Pic}^0(X)$ è sempre un toro complesso proiettivo di dimensione $g$

**ES** se $g=1$

$X$ toro complesso di dim. 1

$\mathrm{Pic}^0(X) \cong X$ 1 2



## Esercizi da Miranda:



C p. 145.

Sia $X$ la cubica proiettiva piana di equazione: $y^2 z = x^3 - x z^2$ $(x:y:z)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Siano:

$p_0 = (0:1:0)$ $p_1 = (0:0:1)$ $p_2 = (1:0:1)$

$p_3 = (-1:0:1)$

equivalenza lineare

Mostrare che: $2p_0 \sim 2p_i \quad \forall i$

e che: $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

---

<u>Def</u> Un divisore $D$ è EFFETTIVO $(D \geq 0)$

se $D(p) \geq 0 \quad \forall p \in X$

e diciamo che $D > 0$ se

$D \geq 0$ e $D \neq 0$.

Allo stesso modo diremo che:

$D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2 \geq 0$

$D_1 > D_2$ se $D_1 - D_2 > 0$

$\rightsquigarrow$ relazione d'ordine parziale sui divisori.

<u>OSS</u> 1) Se $X$ è compatta, si ha:

$D \geq 0 \implies \deg D \geq 0$

$D > 0 \implies \deg D > 0$

2) Ogni D si scrive in modo unico come $D = P - N$

con: $P \geq 0$
$N \geq 0$
e $(\operatorname{supp} P) \cap (\operatorname{supp} N) = \emptyset$.

ES: $\operatorname{div}(f) = \underbrace{\sum_{\operatorname{ord}_p f > 0} \operatorname{ord}_p f \cdot p}_{\text{divisore degli zeri di } f} - \underbrace{\sum_{\operatorname{ord}_p f < 0} |\operatorname{ord}_p f| \cdot p}_{\text{divisore dei poli di } f}$.

## Fasci associati a un divisore.

Vogliamo associare a ogni divisore D un fascio $\mathcal{O}_X(D)$

che sarà un sottofascio del fascio $\mathcal{M}_X$ delle funzioni meromorfe.

Se $U \subseteq X$ è un aperto:

denotiamo con $D_{|U}$ la restrizione di D a U

cioè $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ a supporto discreto

$D_{|U} : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ ancora a supp. discr.

Definiamo:

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{ f \in \mathcal{M}_X(U) \setminus \{0\} \mid \operatorname{div}(f) + D_{|U} \geq 0 \} \cup \{0\}$$

$$= \{ f \in \mathcal{M}_X(U) \setminus \{0\} \mid \mathrm{ord}_p f \geq -D(p) \quad \forall p \in U \} \cup \{0\}.$$

<u>Cosa significa:</u>

Se $p \notin \mathrm{supp}\, D_{|U}$ (cioè $D(p)=0$): $\mathrm{ord}_p f \geq 0$
cioè: $f$ olomorfa in $p$
$\rightsquigarrow f \in \mathcal{O}(U \setminus \mathrm{supp}\, D_{|U})$

Se $D(p) < 0$: $\mathrm{ord}_p f \geq |D(p)| > 0$
$\rightsquigarrow f$ è olomorfa in $p$ e ha in $p$ uno zero <u>almeno</u> di ordine $|D(p)|$

Se $D(p) > 0$: $f$ può avere in $p$ un polo di ordine $D(p)$.

## <u>Esercizio importante:</u>

Mostrare che:

1) $\mathcal{O}_X(D)(U)$ è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathcal{M}_X(U)$ $(\mathrm{ord}_p(f+g) \geq \min(\mathrm{ord}_p f, \mathrm{or}$
2) $\mathcal{O}_X(D)(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-sottomodulo di $\mathcal{M}_X(U)$
3) $\mathcal{O}_X(D)$ è un sottofascio di $\mathcal{M}_X$.

<u>ES:</u> Se $D=0$, allora $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$

<u>Es.</u> Sia $D_1 \leq D_2$. Allora:

$$D_1(p) \leq D_2(p) \quad \forall p \in X$$

$$\Rightarrow -D_1(p) \geq -D_2(p) \quad \forall p \in X$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \subseteq \mathcal{O}_X(D_2).$$

<u>Es.</u> Se $D \geq 0$ ($D$ effettivo), allora

$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(D).$$

<u>Lemma</u>. Sia $X$ ~~var~~ cpta e $D$ un divisore su $X$ con $\deg D < 0$. Allora:

$$\underbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X(D))}_{\mathcal{O}_X(D)(X)} = \{0\}.$$

$\boxed{\text{DIM}}$. Se $\exists f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, $f \neq 0$, allora

$$\operatorname{div}(f) + D \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\deg(\operatorname{div}(f) + D)}_{\deg \operatorname{div}(f) + \deg D = \deg D} \geq 0$$

$\blacksquare$.

<u>Fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli</u>.

Sia $X$ una superficie di Riemann (o varietà complessa)

<u>Def</u> Un FASCIO di $\mathcal{O}_X$-MODULI su $X$ è un fascio $\mathcal{G}$ t.c. $\forall U \subseteq X$ aperto

$\mathcal{F}(U)$ è un modulo nell'anello $O_X(U)$

etc. se $V \subseteq U$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, $f \in O(U)$

allora $(f \cdot s)_{|V} = f_{|V} \cdot s_{|V}$

ES: Il fascio $\mathcal{M}_X$ delle funzioni meromorfe è un fascio di $O_X$-moduli

ES: $O_X(D) \subseteq \mathcal{M}_X$

↳ è un fascio di $O_X$-moduli.

Prop Se $D_1$ e $D_2$ sono divisori linearm. equiv su $X$, allora $O_X(D_1) \cong O_X(D_2)$ come fasci di $O_X$-moduli. $\boxed{D_1 = D_2 + \mathrm{div}\, h}$

Più precisamente:

se $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(h)$ $\quad h \in \mathcal{M}(X)$

allora l'isomorfismo è dato da:

$$O_X(D_1)(U) \longrightarrow O_X(D_2)(U)$$

$$f \longmapsto f \cdot h_{|U}$$

DIM. $\mathrm{div}(f) + D_{1|U} \geq 0$ per ip

~~$\mathrm{div}(f \cdot h_{|U}) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(h)_{|U}$~~

~~$\geq D_{1|U} + \mathrm{div}(h)_{|U}$~~

$\Rightarrow \mathrm{div}(f) + D_{2|U} + \mathrm{div}(h)_{|U} \geq 0$

$\mathrm{div}(f \cdot h_{|U}) + D_{2|U}$

$\forall\ f \cdot h_{|U} \in \mathcal{O}_X(D_2)(U)$

$\leadsto$ l'applicazione è ben definita, è omo di $\mathcal{O}_X(U)$-moduli, e definisce un morfismo di fasci

$$\mu_h : \mathcal{O}_X(D_1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_2).$$

Allo stesso modo abbiamo

$$D_2 = D_1 - \operatorname{div}(h) = D_1 + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\mu_{\frac{1}{h}} : \mathcal{O}_X(D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_1)$$

inversa di $\mu_h$.

__Prop__ Sia $D$ un divisore su $\mathbb{C}_\infty$ con $d := \deg D \geq 0$.

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$

con: $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\infty \in \mathbb{C}_\infty$,

$e_i \in \mathbb{Z}$, $d = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_0 \geq 0$.

Consideriamo la funzione

$$f_0 := \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{-e_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$$

Allora

$H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \{ g(z) \cdot f(z) \mid g \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $\leq d = \deg D \}$.

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\mathrm{ord}_{\lambda_i} f = -e_i$$

$$\mathrm{ord}_\infty f = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ord}_{\lambda_i} f = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(f) = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + \Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\Big)\infty$$

$$\Rightarrow D + \mathrm{div}(f) = d\,\infty = (\deg D)\cdot\infty .$$

$\boxed{\supseteq}$ Se $g$ è un polinomio di grado $\le d$

$$\mathrm{ord}_\infty g = -\deg g \ge -d$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(g) = \begin{pmatrix}\text{divisore degli} \\ \text{zeri di } g \text{ in } \mathbb{C}\end{pmatrix} - (\deg g)\cdot\infty$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(f\cdot g) + D = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g) + D$$

$$= \cancel{(\deg D)\cdot\infty}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}\text{divisore degli zeri} \\ \text{di } g \text{ in } \mathbb{C}\end{pmatrix}}_{\geq 0} + \underbrace{(\deg D - \deg g)}_{\geq 0}\cdot\infty$$

$$\Rightarrow g\cdot f \in H^0(X, \mathcal{O}(D)).$$

$\boxed{\subseteq}$ Sia $h \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$ non nulla.

Sia $g := \dfrac{h}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$.

Allora

$$\mathrm{div}(g) = \mathrm{div}(h) - \mathrm{div}(f) \ge -D - \mathrm{div}(f)$$
$$= -d\cdot\infty$$

$\Rightarrow g$ non ha poli su $\mathbb{C}$, ovvero è un polinomio e $g$ ha un polo di ordine al più $d$ all'$\infty$

$\Rightarrow \deg g \leq d$.

<u>Notazione</u>: sapendo $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ ha dimensione finita (come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale), denotiamo la sua dimensione con $h^0(X, \mathcal{O}(D))$.

<u>Coroll.</u> Sia $D$ un divisore su $\mathbb{C}_\infty$. ~~Allora~~ $H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita e

$$h^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \begin{cases} 0 & \deg D < 0 \\ 1 + \deg D & \deg D \geq 0. \end{cases}$$

---

Sia $X$ cpta e fissiamo: $p \in X$

$D$ un divisore su $X$

e una coordinata locale $z_p$ in $p$

$$\left( \begin{array}{l} z_p : U_p \to \mathbb{C} \quad \text{carta locale} \\ z_p(p) = 0 \end{array} \right.$$

Consideriamo il fascio grattacielo $\mathbb{C}_p$ (concentrato in $p$).

$$\mathbb{C}_p(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } p \notin U \\ \mathbb{C} & \text{se } p \in U \end{cases}$$

Definiamo un morfismo di fasci

$$\varphi : \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

Sia $U \subseteq X$ aperto.

Se $p \notin U$: poniamo $\varphi_U = 0$.

Se $p \in U$: dobbiamo definire

$$\varphi_U : \mathcal{O}_X(D)(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Sia $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$, $f \neq 0$

Allora: $\mathrm{ord}_p f \geq -D(p)$

$\Rightarrow$ localmente: $f = \sum_{n \geq -D(p)} a_n z_p^n$

espressione nella coord. locale (sarebbe $f \circ \psi^{-1}$, $\psi$ carta locale, merom. in $z=0$ in $\mathbb{C}$)

$f$ meromorfa su $U$

$$\left( \begin{array}{c} X \supseteq U \supseteq U_p \ni p \\ \downarrow z_p \\ \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Poniamo $\varphi_U(f) := a_{-D(p)} \in \mathbb{C}$.

Allora:

- $\varphi_U$ è $\mathbb{C}$-lineare
- le $\varphi_U$ sono compatibili con le restrizioni $\rightsquigarrow$ dà una

un morfismo di fasci
$$\varphi : \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

- $\varphi$ dipende dalla scelta della carta locale $z_p$, che è fissata.
- Vediamo cos'è $\ker\varphi$.

$$(\ker\varphi)(U) = \ker\varphi_U$$

$\to$ $p \notin U$ : $\varphi_U = 0 \Rightarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D)(U)$

se $p \in U$: $\varphi_U(f) = 0 \iff a_{-D(p)} = 0$

$\iff \mathrm{ord}_p f > -D(p)$

$\iff \mathrm{ord}_p f \geq -D(p) + 1 = -(D(p) - 1)$

$\iff f \in \mathcal{O}_X(D-p)(U) \subseteq \mathcal{O}_X(D)(U)$

$\rightsquigarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D-p)(U)$.

Nota: se $p \notin U$, allora $(D-p)_{|U} = D_{|U}$
$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D-p)(U) = \mathcal{O}_X(D)(U)$
$\Rightarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D-p)(U)$

$$\Rightarrow \boxed{\ker\varphi = \mathcal{O}_X(D-p).}$$

$\rightsquigarrow$ abbiamo costruito una succ. esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D-p) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_p$$

Mostriamo che $\varphi$ è un morfismo di fasci suriettivo.

Sia $U \subseteq X$ aperto.

Se $p \notin U$: $\varphi_U = \underset{\mathbb{C}_p(U)}{\underset{\parallel}{0}}$ è suriettivo ok

Sia $p \in U$: $\varphi_U : \mathcal{O}_X(D)(U) \longrightarrow \mathbb{C}$

Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sia $U_p \subseteq U$ un aperto su cui è definita la carta locale $z_p$ e t.c. $U_p \cap \operatorname{supp} D = \{p\}$

$$\Rightarrow D_{|U_p} = D(p) \cdot p$$

Consideriamo la funzione

$$g = \lambda z_p^{-D(p)}$$

- $g$ è meromorfa su $U_p$
- $\operatorname{ord}_p g = -D(p)$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{O}_X(D)(U_p)$$

e $\boxed{\varphi_{U_p}(g) = \lambda}$

$\rightsquigarrow$ $\varphi$ è un morfismo di fasci suriettivo

$\Rightarrow$ abbiamo una succ. esatta corta di fasci:

$$0 \to \mathcal{O}_X(D-p) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p \to 0.$$

**Es.** Se $D=0$ la successione diventa:

$$0 \to \underbrace{\mathcal{O}_X(-p)}_{\text{funzioni olomorfe nulle in } p} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow[\text{valutazione in } p]{} \mathbb{C}_p \to 0$$

Vedremo:

**Prop.** $X$ spazio topologico, $G$ gruppo abeliano, $p \in X$, $G_p$ fascio grattacielo concentrato in $p$ con gruppo $G$.

Si ha: $\check{H}^1(X, G_p) = 0$.

**Corollario.** Sia $X$ una sup. di Riemann compatta, $D$ un divisore, $p \in X$. Allora otteniamo una succ. esatta di spazi vettoriali complessi:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \xhookrightarrow{i} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$$

$$\xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \underset{H^1(X,\mathbb{C}_p)}{\overset{\|}{0}}$$

dalla Prop.

- $\gamma$ suriettiva
- $\ker \alpha = H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))$

Abbiamo due possibilità:

$\alpha = 0$ oppure $\alpha$ suriettiva.

<u>I CASO:</u> <u>$\alpha$ suriettiva.</u>

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

e
$$\frac{H^0(X, \mathcal{O}_X(D))}{H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))} \cong \mathbb{C}.$$

Inoltre: $\beta = 0 \Rightarrow \gamma$ iniettiva

$\Rightarrow \gamma$ isomorfismo

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$$